

JOURNÉES DE FORMATION CSDL 9-11 JANVIER 2012
MODÈLES DE SUBSTITUTION
MÉTHODES DE RÉDUCTION D'ORDRE DE MODÈLES

David Ryckelynck

Centre des Matériaux, Mines ParisTech
David.Ryckelynck@mines-paristech.fr

Comment réutiliser au mieux des résultats de simulation antérieures pour réaliser de nouvelles prévisions ?

Comment construire une base réduite de façon adaptative qui permette de tenir compte de paramètres ν qui ont une forte influence sur l'évolution de l'état d'un système non-linéaire et de paramètres $\mu \in \mathcal{D}$ qui en ont moins ?

Comment construire la représentation ci-dessous, avec en pratique $N^{(n)}$ proche de 10 ?

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu, \nu, t) = \mathbf{u}_o(\mathbf{x}, \mu, \nu, t) + \sum_{k=1}^{N^{(n)}} \phi_k^{(n)}(\mathbf{x}') \varphi_k^{(n)}(t, \nu), \quad \mathbf{x}' \in \Omega' \quad t \in]0, T]$$

Comment réduire l'étendu du problème paramétré en introduisant un domaine d'intégration réduit : $\Omega'_{\square} \subset \Omega \times \mathcal{D}$?

Peut-on faciliter la **construction et l'enrichissement** de plans d'expérience avec des modèles d'ordre réduit ?

Un modèle de substitution remplace un modèle de référence. Il a une complexité inférieure à celle du modèle de référence.

L'objectif est d'obtenir des prévisions numériques en utilisant moins de ressources de calcul ou avec des temps de calcul plus courts. Ceci, en exploitant des résultats de calculs antérieurs.

En général on accepte une précision moindre sur les prévisions fournies par le modèle de substitution.

Les modèles d'ordre réduit sont des modèles de substitution dont les inconnues doivent vérifier des équations de bilan physiques.

Les inconnues à déterminer sont des variables d'état \mathbf{u} .

Par définition, l'ordre d'un modèle est le nombre de variables d'état indépendantes permettant de décrire l'évolution de l'état du système étudié.

Réduire l'ordre d'un modèle c'est réduire le nombre de variables d'état de ce modèle.

Il est alors nécessaire de reformuler les équations physiques à satisfaire.

Ceci conduit dans la plus part des cas à des méthodes intrusives sur le plan informatique.

L'avantage d'un modèle d'ordre réduit est qu'il résulte d'une suite d'approximations dont la pertinence est quantifiable. Nous ne parlerons pas de mesure d'erreur dans ce cours bien qu'il soit possible de quantifier rigoureusement toutes les erreurs de modélisation en mécanique et en thermique.

Le cas des modèles à variables internes ne sera pas traité ici.

L'état du modèle réduit est décrit comme une combinaison linéaire de modes $\{\phi_k\}_{k=1}^N$. Chaque mode est similaire à un état particulier du modèle de référence. La visualisation des modes aide à comprendre les transformations modélisées. Les modes améliorent la compréhension physique des phénomènes étudiés.

Un des résultats du projet CSDL est que les méthodes de Surface de Réponse sont des approches complémentaires des méthodes de réduction d'ordre de modèles.

Les méthodes de construction de surface de réponse servent à explorer un espace paramétrique \mathcal{D} . On s'intéresse à la réponse $s(\mu)$, $\mu \in \mathcal{D}$, d'un système qui occupe un domaine Ω .

La réponse est extraite de l'état du système : $s(\mu) = \ell(\mathbf{u}; \mu)$

L'analyse de points singuliers de $\mu \in \mathcal{D} \rightarrow s(\mu)$ conduit à l'étude d'états particuliers que l'on peut décrire par un modèle d'ordre réduit.

Ce modèle d'ordre réduit peut aider à simplifier l'enrichissement de la surface de réponse, mais également sa genèse.

L'étude de la réponse en fréquence d'une structure, au voisinage de **résonances**, conduit à l'observation de **modes propres**.

La construction d'une **base modale réduite** permet de construire, à moindre effort et de façon approchée, les réponses en fréquence de systèmes linéaires de grande taille.

L'intérêt des modèles d'ordre réduit est de simplifier des études paramétriques comme :

- l'étude de régimes transitoires pour différents paramètres de condition initiale, de sollicitation, de comportement du matériau, de forme géométrique,
- l'étude de sensibilité de prévisions pour tout type de variations paramétriques,
- la propagation d'incertitudes pour quantifier l'effet d'incertitudes sur des prévisions,
- la recherche de paramètres optimaux en exploitant des évaluations peu coûteuses de la fonction objectif,
- la résolution approchée de problèmes couplés (espace paramétrique excessivement grand),
- l'extension des paramètres à faire varier.

Les méthodes de réduction d'ordre de modèle permettent de compenser le caractère très général de méthodes d'approximation comme la méthode des éléments finis en définissant des modèles tenant compte des spécificités du domaine d'application dans la représentation de l'état du système.

Avant de définir le modèle d'ordre réduit rappelons que l'on cherche une solution d'une équation de bilan définie par une formulation variationnelle d'équations aux dérivées partielles.

Forme faible de l'Equation aux Dérivées Partielles \mathcal{L} :

↪ trouver $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{u}_0 + \mathcal{V}$ tel que :

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad \forall t \in]0, t_F]$$

Les champs recherchés doivent être admissibles. Ce sont des éléments de l'espace de Hilbert \mathcal{V} .

Méthode des éléments finis :

↪ trouver $\{q_j(t)\}_{j=1}^{\mathcal{N}}$ tel que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathbf{N}_j(\mathbf{x}) q_j(t)$ et

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}, \quad \forall t \in]0, t_F]$$

★ $\mathcal{V}_h = \text{Span}\{\mathbf{N}_j\}_{j=1}^{\mathcal{N}}$ les fonctions de forme sont définies par un maillage de Ω et le choix d'éléments finis.

Tous les états admissibles sont-ils réalistes ?

Plus un maillage est fin (par un processus de découpage uniforme), meilleure est la prévision souhaitée, mais plus il permet de prévisions précises pour un nombre de cas d'étude croissant. **Donnez des exemples d'états différents pour un domaine Ω donné. Peut-on avec un même maillage obtenir une prévision de chacun de ces états ?**

Méthode des éléments finis :

↪ trouver $\{q_j(t)\}_{j=1}^{\mathcal{N}}$ tel que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathbf{N}_j(\mathbf{x}) q_j(t)$ et

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}, \quad \forall t \in]0, t_F]$$

Il suffit de construire un sous-espace de \mathcal{V}_h , noté \mathcal{V}_{ROM} , et de considérer l'approximation $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_{ROM}$ pour définir un modèle d'ordre réduit.

Par définition, $\mathcal{V}_{ROM} = \mathbf{Span}\{\phi_k\}_{k=1}^N \subset \mathcal{V}_h$, avec $\{\phi_k\}_{k=1}^N$ famille libre de vecteurs de \mathcal{V}_h .

Propriétés :

$$\star \exists \mathbf{A} = [A_{ik}] \quad | \quad \phi_k = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mathbf{N}_i A_{ik}, \quad k = 1, \dots, N$$

$$\star \mathbf{u} \in \mathcal{V}_{ROM} \Rightarrow \exists \mathbf{a} = \{a_k\}_{k=1}^N \quad | \quad \mathbf{u} = \sum_{k=1}^N \phi_k a_k$$

Méthode des éléments finis :

↪ trouver $\{q_j(t)\}_{j=1}^{\mathcal{N}}$ tel que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathbf{N}_j(\mathbf{x}) q_j(t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathbf{N}_j(\mathbf{x}) q_j^*(t)$ et

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}, \quad \forall t \in]0, t_F]$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{q}^{*T} \mathbf{R}(\mathbf{q}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{q}^*, \quad \forall t \in]0, t_F]$$

\Leftrightarrow

$$\boxed{\mathbf{R}(\mathbf{q}, t) = 0, \quad \forall t \in]0, t_F]}$$

Modèle d'ordre réduit ($\mathbf{q} = \mathbf{A} \mathbf{a}$), formulation de Galerkin ($\mathbf{q}^* = \mathbf{A} \mathbf{a}^*$) :

↪ trouver \mathbf{a} tel que :

$$\mathbf{a}^{*T} \mathbf{A}^T \mathbf{R}(\mathbf{A} \mathbf{a}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{a}^*, \quad \forall t \in]0, t_F]$$

\Leftrightarrow

$$\boxed{\mathbf{A}^T \mathbf{R}(\mathbf{A} \mathbf{a}, t) = 0, \quad \forall t \in]0, t_F]}$$

Modèle d'ordre réduit linéaire :

↪ trouver \mathbf{a} tel que :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{R}(\mathbf{A} \mathbf{a}, t) = 0, \quad \forall t \in]0, t_F]$$

↔

$$\boxed{\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{A}^T \mathbf{F}(t), \quad \forall t \in]0, t_F]}$$

Propriété : la matrice réduite $\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A}$ est une matrice carrée de dimension $N \ll \mathcal{N}$.

Modèle d'ordre réduit du problème linéarisé :

↪ trouver $\delta \mathbf{a}$ tel que :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{R}(\mathbf{A} (\mathbf{a} + \delta \mathbf{a}), t) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{A}^T \mathbf{J} \mathbf{A} \delta \mathbf{a} = -\mathbf{A}^T \mathbf{R}(\mathbf{A} \mathbf{a}, t)}$$

Approche intrusive : Modifier le solveur linéaire pour trouver $\delta \mathbf{a}$ et reconstruire $\delta \mathbf{q} = \mathbf{A} \delta \mathbf{a}$.

En général, pour les problèmes non linéaires, il n'y a pas de propriété physique d'orthogonalité permettant de diagonaliser $\mathbf{A}^T \mathbf{J} \mathbf{A}$.

Pour construire une approximation s_{RS} de $\mu \in \mathcal{D} \rightarrow s(\mu)$ nous utilisons un échantillonnage de \mathcal{D} par une liste de valeurs de paramètres $\mathcal{F}_{\mathcal{D}} = \{\mu_p\}_{p=1}^{\mathcal{P}}$:

$$s_{RS}(\mu; \{\mu_p\}_{p=1}^{\mathcal{P}}, \{s(\mu_p)\}_{p=1}^{\mathcal{P}}) = \sum_{p=1}^{\mathcal{P}} \xi_p(\mu) s(\mu_p) \quad \forall \mu \in \mathcal{D} \quad (1)$$

où ξ_p sont des fonctions d'interpolation relatives à la méthode utilisée pour définir la surface de réponse.

Il faut donc évaluer $s(\mu_p) = \ell(\mathbf{u}; \mu_p)$ où \mathbf{u} dépend de μ_p .

Propriété : L'ensemble des champs générés par $\mu_p \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{u}(\mu_p)$ engendre un sous-espace de \mathcal{V}_h .

L'ensemble des champs générés par $\mu_p \in \mathcal{F}_D \rightarrow \mathbf{u}(\mu_p)$ engendre un sous-espace de \mathcal{V}_h .

La méthode **snapshot POD** [Sirovich 1987]¹ permet de construire \mathcal{V}_{ROM} à partir de la liste des champs $\{\mathbf{u}(\mu_p)\}_{p=1}^P$. Elle génère des **modes empiriques** notés ϕ_k .

C'est une méthode ***a posteriori*** car la base réduite est construite à partir de solutions connues du problème de référence. Il existe aussi des méthodes ***a priori*** où la base réduite est construite au cours de la résolution approchée des équations différentielles du modèle de référence.

La précision de la base réduite obtenue par une méthode *a posteriori* dépend de la similitude entre le cas à traiter et les cas relatifs à \mathcal{F}_D . En pratique il faut associer une **région de confiance** à la base réduite *a posteriori* [Bergmann 2008]². La base réduite devient alors fonction des paramètres. Il est possible d'**interpoler** des bases réduites dans l'espace des paramètres [Amsallem 2009]³.

1. L. Sirovich, Turbulence and the dynamics of coherent structures part I : coherent structures, Quarterly of applied mathematics 65 (3) (1987) 561–571.

2. M. Bergmann, L. Cordier, Optimal control of the cylinder wake in the laminar regime by trust-region methods and POD reduced-order models, J. of Computational Physics 227 (2008) 7813–7840.

3. D.Amsallem, J.Cortial, F.C. Carlberg K., A method for interpolating on manifolds structural dynamics reduced-order models, Int. J. Numer. Meth. Engng 80 (2009) 1241–1258.

On choisit un échantillonnage de l'état du système, pour différents instants et pour différentes valeurs de paramètre :

$$\{\mathbf{u}_j\}_{j=1}^m \in \mathcal{V}_h \quad (2)$$

On cherche les modes empiriques sous la forme :

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \mathbf{u}_j(\mathbf{x}) b_j \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3)$$

et maximisant le quotient (la projection) :

$$\lambda(\phi) = \frac{\sum_{j=1}^m \left(\int_{\Omega} \mathbf{u}_j(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^2}{\int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \quad (4)$$

C'est un problème aux valeurs propres.

Cette méthode est largement utilisée pour **synthétiser des résultats**. La méthode C-POD proposée par P. Villon permet de tenir compte de contraintes.

La solution est donnée par les vecteurs propres \mathbf{b}_k de la matrice de corrélation \mathbf{D} tel que :

$$D_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, m \quad (5)$$

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{b}_k = \lambda_k \mathbf{b}_k, \quad k = 1, \dots, m \quad (6)$$

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k = (1 - \epsilon_{POD}) \sum_{k=1}^m \lambda_k \quad (8)$$

$$\phi_k = \sum_{j=1}^m \mathbf{u}_j(\mathbf{x}) b_{jk}, \quad k = 1, \dots, N \leq m \quad (9)$$

Pour un modèle éléments finis, la méthode Snapshot POD revient à rechercher les valeurs

propres de $\mathbf{Q}^T \mathbf{M} \mathbf{Q}$, où $\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mathbf{N}_i Q_{ij}$ et $M_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) \mathbf{N}_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Une méthode similaire consiste à rechercher la décomposition aux valeurs singulières (SVD) de la matrice \mathbf{Q} . Les vecteurs à droite correspondent aux \mathbf{b}_k^T et les vecteurs à gauche aux colonnes de \mathbf{A} .

Pour les problèmes non linéaires, la construction du problème d'ordre réduit est coûteuse.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{J} \mathbf{A} \delta \mathbf{a} = -\mathbf{A}^T \mathbf{R}(\mathbf{A} \mathbf{a}, t) \quad (10)$$

En science des matériaux, le calcul complet de $\mathbf{R}(\mathbf{A} \mathbf{a}, t)$ est non négligeable. De plus, le nombre d'opérations (additions et multiplications) nécessaires à l'assemblage du système réduit est de $2 N^2 \mathcal{N} + 2 \mathcal{N} \omega N$ pour la matrice et de $2 N \mathcal{N}$ pour le second membre, ω étant la largeur de bande de \mathbf{J} .

Il est possible de **reconstruire** un vecteur de résidu complet $\tilde{\mathbf{R}}$ à partir de quelques lignes du résidu \mathbf{R} et de réduire les coûts d'assemblage en utilisant la méthode Empirical Interpolation Method (EIM)⁴ ou la méthode gappy POD⁵. Il est alors nécessaire d'avoir des bases réduites pour les résidus et les matrices jacobiniennes⁶.

Dans le cadre de CSDL, nous avons poursuivi le développement d'une méthode d'Hyper-Réduction⁷. Les résidus ne sont pas reconstruits. Seules **quelques équations** sont sélectionnées pour la formulation réduite.

4. M. Barrault, Y. Maday, N. C. Nguyen, A. T. Patera, An 'empirical interpolation' method : application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I 339 (2004) 667–672.

5. K. Willcox, Unsteady flow sensing and estimation via the gappy proper orthogonal decomposition, Computers & Fluids 35 (2006) 208–226.

6. K. Carlberg, J. Cortial, D. Amsallem, M. Zahr, C. Farhat, The GNAT nonlinear model reduction method and its application to fluid dynamics problems, 6th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference, Honolulu, Hawaii, June 2730 (2011) 2011–3112.

7. D. Ryckelynck, A priori hyperreduction method : an adaptive approach, International Journal of Computational Physics 202 (2005) 346–366.

Seules quelques équations sont sélectionnées pour la formulation réduite. Pour cela, une formulation de Petrov-Galerkin est utilisée en choisissant des fonctions tests tronquées . Soit $\mathcal{V}_{ROM \Pi}$ le sous-espace des fonctions tests tronquées :

$$\mathcal{V}_{ROM \Pi} = \{ \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{ROM} \mid \exists \mathbf{w} \in \mathcal{V}_{ROM} \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x}) \mathbf{w}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \beta|_{\Omega \setminus \Omega_{\Pi}} = 0 \}$$

La dimension du sous espace $\mathcal{V}_{ROM \Pi}$ doit être la même que celle de \mathcal{V}_{ROM} .
Formulation de Petrov-Galerkin : On cherche $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_{ROM}$ tel que

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{ROM \Pi}$$

Propriété : On obtient le problème suivant, on cherche $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_{ROM}$ tel que

$$\int_{\Omega_{\Pi}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{ROM \Pi}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{J} \mathbf{A} \delta \mathbf{a} = -\mathbf{A}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{R}(\mathbf{A} \mathbf{a}, t) \quad (11)$$

où \mathbf{Z} est une sélection de m_Z ($m_Z \geq N$) lignes de la matrice identité. Seules ces lignes sont à assembler. Le coût d'assemblage est $2 \omega m_Z N + 2 m_Z N^2$ pour la matrice et $2 N m_Z$ pour le second membre. Ces coûts sont réduits d'un facteur $\frac{N}{m_Z}$.

8. D. Ryckelynck, Hyper reduction of mechanical models involving internal variables. Int J Numer Methods Eng (2009) 77(1) :75–89

La méthode d'Hyper-réduction : construction de

$$\Omega_{\Pi} = \mathcal{C}(\{e_i^{\Omega}\}_{i=1}^{\mathcal{N}_e}, \{\phi_k\}_{k=1}^N)$$

Construction du domaine d'intégration réduit Ω_{Π} .

$$\Omega_k^u = \arg \max_{e_j^{\Omega}, j=1, \dots, \mathcal{N}_e} \|\nabla \phi_k + \nabla^T \phi_k\|_{e_j^{\Omega}}, \quad k = 1, \dots, N \quad (12)$$

$$\bar{\Omega}^u = \cup_{k=1}^N \Omega_k^u \quad (13)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_Z = \{i \mid i \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}, \|\mathbf{N}_i\|_{\bar{\Omega}^u} > 0\} \quad (14)$$

$$\Omega_{\Pi} = \left\{ e_j^{\Omega} \mid j \in 1, \dots, \mathcal{N}_e, \sum_{i \in \tilde{\mathcal{F}}_Z} \|\mathbf{N}_i\|_{e_j^{\Omega}} > 0 \right\} \quad (15)$$

S'il y a des variables internes :

$$\Omega_{\Pi} = \left\{ e_j^{\Omega} \mid j \in 1, \dots, \mathcal{N}_e, \sum_{i \in \tilde{\mathcal{F}}_Z} \|\mathbf{N}_i\|_{e_j^{\Omega}} > 0 \right\} \oplus \cup_{k=1}^{N_{\alpha}} \Omega_k^{\alpha} \quad (16)$$

Formulation de Petrov-Galerkin avec $\mathcal{V}_{ROM \Pi} = \mathbf{Span}\{\psi_k\}_{k=1}^N \subset \mathcal{V}_h$

$$\psi_k = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) \Lambda_{ij} A_{ik}, k = 1, \dots, N \quad (17)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z}, \quad (18)$$

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_Z} \|\mathbf{N}_j(\mathbf{x})\| = 0 \quad \forall j \leq \mathcal{N} - \gamma \quad (19)$$

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_Z} \|\mathbf{N}_j(\mathbf{x})\| > 0 \quad \forall j > \mathcal{N} - \gamma \quad (20)$$

$$m_Z = \mathcal{N} - \gamma \quad (21)$$

$$Z_{ij} = \delta_{ij} \quad \forall i \in \{1, \dots, m_Z\} \quad \forall j \in \{1, \dots, \mathcal{N}\} \quad (22)$$

$$\Lambda_{ij} = \delta_{ij} \quad \forall i \in \{1, \dots, m_Z\} \quad \forall j \in \{1, \dots, \mathcal{N}\} \quad (23)$$

$$\Lambda_{ij} = 0 \quad \forall i \in \{m_Z + 1, \dots, \mathcal{N}\} \quad \forall j \in \{1, \dots, \mathcal{N}\} \quad (24)$$

Modèle d'ordre réduit du problème linéarisé ($\mathbf{q}^* = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{A} \mathbf{a}^*$) :

↔ trouver $\delta \mathbf{a}$ tel que :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{R}(\mathbf{A}(\mathbf{a} + \delta \mathbf{a}), t) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{A}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{J} \mathbf{A} \delta \mathbf{a} = -\mathbf{A}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{R}(\mathbf{A} \mathbf{a}, t)}$$

Approche intrusive : Modifier la procédure d'assemblage et le solveur linéaire pour trouver $\delta \mathbf{a}$ et reconstruire $\delta \mathbf{q} = \mathbf{A} \delta \mathbf{a}$.

Introduire un maillage tronqué, le maillage restreint à Ω_Π , lors de l'assemblage de $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{J} \mathbf{A}$ et de $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{R}(\mathbf{A} \mathbf{a}, t)$.

Les méthodes présentées précédemment sont des méthodes *a posteriori*. Il est nécessaire de résoudre au moins un problème préliminaire d'une complexité comparable à celle du problème de référence.

La méthode LATIN⁹, la méthode PGD¹⁰, les algorithmes gloutons (greedy algorithm) et la méthode APCR^{11 12} sont des méthodes *a priori* qui permettent de contourner cette difficulté.

Les méthodes *a priori* permettent de découvrir les modes empiriques significatifs au cours de la résolution approchée du problème de référence. **Elles contiennent un processus d'adaptation des bases réduites.**

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, t) + \sum_{k=1}^{N^{(n)}} \phi_k^{(n)}(\mathbf{x}) \varphi_k^{(n)}(t, \boldsymbol{\mu}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{D} \quad t \in]0, T] \quad (25)$$

où n est le nombre d'adaptations du modèle d'ordre réduit réalisées. En principe, en diminuant la précision des simulations il est possible d'avoir des prévisions en un temps plus court.

9. P. Ladevèze, *Nonlinear Computational Structural Mechanics : New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation.*, Springer Verlag, 1999.

10. A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, R. Keunings, A new family of solvers for some classes of multi-dimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 139 (2006) 153–176.

11. D. Ryckelynck, A priori hyperreduction method : an adaptive approach, *International Journal of Computational Physics* 202 (2005) 346–366.

12. D. Ryckelynck, D. Missoum Benziane, Multi-level a priori hyper reduction of mechanical models involving internal variables, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng* 199 (2010) 1134–1142.

La méthode APHR est une méthode incrémentale. L'adaptation des bases réduites est réalisée lors de l'intégration en temps, pas à pas, des équations différentielles.

Soit $(\{\phi_k^{(n)}\}_{k=1}^{N^{(n)}}, \Omega_Z^{(n)})$ un HRM donné, trouver $\{\varphi_k^{(n)}\}_{k=1}^{N^{(n)}}$ et $\delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}_h$ pour $t = t_{j+1}$, et si $\delta \mathbf{u}$ n'est pas nul, trouver $(\{\phi_k^{(n+1)}\}_{k=1}^{N^{(n+1)}}, \Omega_Z^{(n+1)})$ tel que :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, t) + \sum_{k=1}^{N^{(n)}} \phi_k^{(n)}(\mathbf{x}) \varphi_k^{(n)}(t, \boldsymbol{\mu}) + \delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{D}, \quad (26)$$

$$\phi_k^{(n)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) A_{ik}^{(n)}, \quad k = 1, \dots, N^{(n)}, \quad (27)$$

$$(\phi_k^{(n)}, \delta \mathbf{u})_{\Omega} = 0, \quad k = 1, \dots, N^{(n)}, \quad (28)$$

$$\int_{\Omega_Z^{(n)}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}_0 + \sum_{k=1}^{N^{(n)}} \phi_k^{(n)} \psi_k^{(n)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad k = 1, \dots, N^{(n)}, \quad (29)$$

$$\text{if } \eta_Z^{(n)}(\mathbf{u}_0 + \sum_{k=1}^{N^{(n)}} \phi_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}, t) > \epsilon_R \max_{t \in]0, t_{j+1}]} \eta_Z^{(n)}(0, t), \quad (30)$$

then find $\delta \mathbf{u}$ and $\delta \boldsymbol{\alpha}$ such that

$$\left\{ \int_{\Omega} \mathcal{L}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}, \quad (31) \right.$$

$$\left. \begin{cases} \sum_{k=1}^{N^{(n+1)}} \phi_k^{(n+1)} \varphi_k^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{N^{(n)}} \phi_k^{(n)} \varphi_k^{(n)} + \delta \mathbf{u}, \\ \Omega_Z^{(n+1)} = \mathcal{C}(\{e_j^{\Omega}\}_{j=1}^{\mathcal{N}_e}, \{\phi_k^{(n+1)}\}_{k=1}^{N^{(n+1)}}), \end{cases} \quad (32)$$

$$\text{else } \delta \mathbf{u} = 0 \quad (33)$$

Après chaque correction de la prévision en base réduite, la base réduite est adaptée.

$$\varphi_k^{(n)} = \left(\phi_k^{(n)}, \mathbf{u} \right)_{\Omega}, \quad k = 1, \dots, N^{(n)}, \quad (34)$$

$$\phi_k^{(n+1/2)} = \phi_k^{(n)}, \quad k = 1, \dots, N^{(n)}, \quad (35)$$

$$\varphi_k^{(n+1/2)} = \varphi_k^{(n)}, \quad k = 1, \dots, N^{(n)}, \quad (36)$$

$$\phi_{N^{(n)}+1}^{(n+1/2)} = \frac{\delta \mathbf{u}}{\|\delta \mathbf{u}\|_{\Omega}}, \quad (37)$$

$$\varphi_{N^{(n)}+1}^{(n+1/2)} = \|\delta \mathbf{u}\|_{\Omega}, \quad (38)$$

$$M_{ij}^{(n+1/2)} = \int_0^{t_j+1} \varphi_i^{(n+1/2)} \varphi_j^{(n+1/2)} dt, \quad i = 1, \dots, N^{(n)} + 1, \quad j = 1, \dots, N^{(n)} + 1, \quad (39)$$

$$\mathbf{M}^{(n+1/2)} \mathbf{V}_p^{(n+1)} = \lambda_p \mathbf{V}_p^{(n+1)}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N^{(n)}+1}, \quad (40)$$

$$N^{(n+1)} = \arg \min_{p \in \{1, \dots, N^{(n)}+1\}, \text{ with } \lambda_p \leq \epsilon_{POD} \lambda_1} p, \quad (41)$$

$$\phi_j^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{N^{(n)}+1} \phi_k^{(n+1/2)} V_{kj}, \quad j = 1, \dots, N^{(n+1)}, \quad (42)$$

$$\varphi_j^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{N^{(n)}+1} \varphi_k^{(n+1/2)} V_{kj}, \quad j = 1, \dots, N^{(n+1)} \quad (43)$$

Dans le cadre du projet CSDL nous avons développé une version multidimensionnelle de la méthode APHR. Plusieurs cas du problème paramétrique sont traités de façon simultanée. Cette approche favorise la description des **transformations synchrones** avec un domaine d'intégration multidimensionnel très réduit.

Les modes empiriques sont des modes multidimensionnels définis sur $\Omega' = \Omega \times \mathcal{D}$. On note $\mathbf{x}' = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$ le point de cet espace multidimensionnel.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, t) + \sum_{k=1}^{N^{(n)}} \phi_k^{(n)}(\mathbf{x}') \varphi_k^{(n)}(t), \quad \mathbf{x}' \in \Omega' \quad t \in]0, T] \quad (44)$$

$$\phi_k^{(n)}(\mathbf{x}') = \sum_{p=1}^{\mathcal{P}} \xi_p(\boldsymbol{\mu}) \phi_k^{(n)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_p), \quad \mathbf{x}' \in \Omega', \quad k = 1, \dots, N^{(n)} \quad (45)$$

L'algorithme APHR présenté ci-dessus est préservé. Il suffit de construire des maillages multidimensionnels échantillonnés dans \mathcal{D} pour traiter de façon simultanée plusieurs cas de calcul.

La méthode APHR multidimensionnelle facilite l'**enrichissement de plans d'expérience** en calculant efficacement des réponses pour des nouveaux points d'échantillonnage où en actualisant les réponses d'un ancien plan lorsque l'on ajoute un paramètre à l'étude paramétrique (on ajoute alors une dimension). Comme la PGD, elle inclut une méthode de surface de réponse qui permet des prévisions en **temps réel**.

Comment interpoler des résultats lors de l'ajout d'un point d'échantillonnage dans \mathcal{D} , en $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{P}+1}$?

Le domaine Ω est vu comme un hyperplan du domaine Ω' , d'équation $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{P}+1}$.

La restriction d'une base à un sous-domaine n'étant pas nécessairement une famille libre de vecteurs, les méthodes d'interpolation de bases réduites sont caduques.

La méthode snapshot POD appliquée à des états interpolés permet de reconstruire un HRM pour $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{P}+1}$.

$$\tilde{\phi}_j(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \phi_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{P}+1}) W_{kj}, \quad j = 1, \dots, \tilde{N}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (46)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} \mathbf{W}_p = \tilde{\lambda}_p \mathbf{W}_p, \quad \tilde{\lambda}_1 \geq \tilde{\lambda}_2 \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_N \quad (47)$$

$$\tilde{M}_{ij} = \sqrt{\tilde{\lambda}_i} \sqrt{\tilde{\lambda}_j} \int_{\Omega} \phi_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{P}+1}) \phi_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{P}+1}) dx \quad (48)$$

$$\tilde{N} = \arg \min_{p \in \{1, \dots, N\}} \text{with } \tilde{\lambda}_p \leq \epsilon_{POD} \tilde{\lambda}_1 \quad p \quad (49)$$

La méthode APHR multidimensionnelle et l'ajout d'un paramètre au plan d'expérience

Le HRM d'un plan antérieur peut servir de HRM initial à une simulation multidimensionnelle pour laquelle le paramètre ν a changé de valeur. Il faut alors réactualiser les variables réduites et éventuellement le HRM par le processus d'adaptation de la méthode APHR.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \nu, t) = \mathbf{u}_o(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \nu, t) + \sum_{k=1}^{N^{(n)}} \phi_k^{(n)}(\mathbf{x}') \varphi_k^{(n)}(t, \nu), \quad \mathbf{x}' \in \Omega' \quad t \in]0, T] \quad (50)$$

L'algorithme APHR reste inchangé, mis à part la sélection des événements significatifs pour lequel la matrice de corrélation devient :

$$\begin{aligned} M_{ij}^{(n+1/2)} &= \int_0^T \varphi_i^{(n+1/2)}(t, \nu_1) \varphi_j^{(n+1/2)}(t, \nu_1) dt \\ &+ \int_0^{t_{j+1}} \varphi_i^{(n+1/2)}(t, \nu_2) \varphi_j^{(n+1/2)}(t, \nu_2) dt, \end{aligned} \quad (51)$$

$i = 1, \dots, N^{(n)} + 1, j = 1, \dots, N^{(n)} + 1$

Ainsi, lors des adaptations de base réduite, nous préservons les résultats acquis pour anticiper les transformations qui restent à simuler.

La méthode séquentielle et la méthode multidimensionnelle peuvent être associées. Les variables d'état réduites peuvent tenir compte de l'évolution de paramètres ν qui ont une forte influence sur l'évolution temporelle de l'état du système.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, t) = \mathbf{u}_o(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, t) + \sum_{k=1}^{N^{(n)}} \phi_k^{(n)}(\mathbf{x}') \varphi_k^{(n)}(t, \boldsymbol{\nu}), \quad \mathbf{x}' \in \Omega' \quad t \in]0, T] \quad (52)$$

Actuellement, les problèmes que l'on ne sait pas traiter efficacement avec la méthode APHR sont des problèmes où la localisation temps-espace des transformations évolue fortement au cours du temps (ondes progressives, tourbillons, certaines instabilités, ...). Mais la recherche n'a pas dit son dernier mot à ce sujet....

Attention, il faut beaucoup de mémoire disponible pour la mise en œuvre de ces méthodes. Un nouveau problème se pose, celui de la pérennité de la mémoire et de s'en faire une idée juste. Pour finir, il faut plus de savoir faire pour utiliser la mémoire des résultats de simulation. Il y a donc un nouveau besoin de formation des ingénieurs.

Thèse de Sophie Cartel soutenue le 25 novembre 2011, Méthodes numériques de représentation à variables séparées pour la résolution des problèmes paramétriques en mécanique non linéaire des structures, Mines ParisTech.

Posdoc de Fatima Daïm, méthode APHR parallèle pour les problèmes multidimensionnels thermomécaniques.