ECOLE DES MINES
DE PARIS

Collège doctoral

*N° attribué par la bibliothèque*
/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/

# THESE

pour obtenir le grade de
**Docteur de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris**
Spécialité Sciences et Génie des Matériaux

présentée et soutenue publiquement par

**Thierry DILLARD**

le 4 mars 2004

# Caractérisation et simulation numérique du comportement mécanique des mousses de nickel : morphologie tridimensionnelle, réponse élastoplastique et rupture

*Directeurs de thèse* : ***Samuel FOREST***
***Yves BIENVENU***

Jury

| | | |
|---|---|---|
| M. E. MAIRE | Rapporteur | INSA Lyon |
| M. A. MORTENSEN | Rapporteur | Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne |
| M. J. CREPIN | Examinateur | Ecole Polytechnique |
| M. R. DENDIEVEL | Examinateur | INP Grenoble |
| M. Y. BIENVENU | Examinateur | Ecole des Mines de Paris |
| M. S. FOREST | Examinateur | Ecole des Mines de Paris |
| M. M. CROSET | Invité | Technologies Conseil |

---

**Centre des Matériaux P. M. Fourt de l'Ecole des Mines de Paris,**
**B.P.87, 91003 Evry Cedex**

# Résumé

L'objectif de ces travaux de thèse est double. Il consiste, dans un premier temps, à étudier la microstructure des mousses de nickel ainsi que les mécanismes locaux de déformation et de rupture, puis, dans un second temps, à proposer une modélisation du comportement mécanique global en traction des mousses. Des essais mécaniques in-situ sous MEB ou en tomographie aux rayons X ont été réalisés. Ces essais montrent que les mécanismes de déformation en traction diffèrent de ceux observés en compression. La mousse se déforme en traction par réalignement et étirement des brins tandis qu'une flexion suivie d'un flambement des brins s'opèrent en compression. De plus, une forte localisation de la déformation dans les zones moins denses de la mousse est visualisée au cours d'un essai de compression. L'étude des mécanismes de rupture en traction fait aussi apparaître que la fissuration des mousses, majoritairement transgranulaire, intervient préférentiellement aux nœuds. Sa propagation s'effectue cellule par cellule et la zone endommagée possède une largeur d'environ cinq cellules. A partir des essais de tomographie aux rayons X, l'architecture initiale de la mousse ainsi que son évolution au cours du chargement ont été reconstruites. L'analyse de la morphologie tridimensionnelle de la mousse montre qu'un tiers des cellules est constitué de dodécahèdres et que 57 % des faces des cellules sont pentagonales. L'influence du procédé de fabrication de la mousse est de deuxième importance par rapport à celui de la mousse précurseur en polyuréthanne. Les cellules sont allongées et orientées suivant la direction normale de la mousse. Cette anisotropie géométrique explique, au moyen d'un modèle analytique simple, l'anisotropie élastique observée en traction. La forme de la cellule la plus répandue a aussi été identifiée. Il s'agit d'un dodécahèdre, composé de deux quadrilatères, de huit pentagones et de deux hexagones. Pour modéliser le comportement mécanique des mousses en traction, deux voies ont été envisagées. La première consiste à décrire la mousse par un réseau de poutres se déformant uniquement par flexion. Le comportement uniaxial des mousses est alors simulé en fonction de la densité et de l'anisotropie géométrique. Le modèle montre que l'arrivée et la propagation du front plastique dans la poutre ne suffisent pas à expliquer la non linéarité du comportement macroscopique observée expérimentalement. A partir des lois de comportement des matériaux constitutifs des brins de la mousse, le modèle est aussi capable de prévoir le comportement uniaxial global de mousses multiphasées. L'application du modèle à deux phases au cas des mousses de nickel oxydées prouve que le comportement plus rigide des mousses oxydées peut être prédit en fonction de leur degré d'oxydation en tenant compte, toutefois, de la rupture de la couche d'oxyde. La deuxième approche, plus phénoménologique, met en œuvre une vision continue de la mousse. La mousse est alors assimilée à un milieu homogène équivalent. Des essais mécaniques, mesurant simultanément les déformations instantanées dans les trois directions principales de la mousse, ont été développés pour identifier les paramètres du modèle. Le modèle multiaxial est alors testé autour d'un trou macroscopique réalisé dans une plaque de mousse, puis validé par comparaison avec les champs de déformation issus d'essais photomécaniques. Ces essais photomécaniques mettent en exergue des hétérogénéités de déformation non expliquées ainsi qu'un effet d'échelle dû à la taille critique d'un trou dans un milieu poreux. Le modèle classique, inapte à prévoir cet effet de taille, est alors étendu vers la mécanique des milieux continus généralisés. En introduisant une seule variable interne supplémentaire, le modèle micromorphe choisi est capable de rendre compte de l'effet d'échelle observé expérimentalement. De plus, ce modèle permet aussi de donner une bonne estimation de la largeur de la zone fissurée et de la ductilité des mousses en présence de fissures.

**Mots clés : Mousses métalliques, Nickel, Cellules Ouvertes, Anisotropie, Traction, Tomographie aux rayons X, Flexion élastoplastique, Corrélation d'images, Milieu Micromorphe.**

# Abstract

**Mechanical behaviour of nickel foams : three-dimensional morphology, non-linear models and fracture.**

The deformation behaviour and failure of nickel foams were studied during loading by using X-ray microtomography. Strut alignment and stretching are observed in tension whereas strut bending followed by strut buckling are observed in compression. Strain localisation, that occurs during compression tests, depends on nickel weight distribution in the foam. Fracture in tension first takes place at cell nodes and the crack propagates cell by cell. The damaged area in front of a crack is about five cells wide. A detailed description of the three-dimensional morphology is also presented. One third of the cells are dodecahedra and 57 % of the faces are pentagonal. The most frequent cell is composed of two quadrilaterals, two hexagons and eight pentagons. The dimensions of the equivalent ellipsoid of each cell are identified and cell orientation are determined. The geometrical aspect ratio is linked to the mechanical anisotropy of the foam.

In tension, a uniaxial analytical model, based on elastoplastic strut bending, is developed. The whole stress-strain curve of the foam is predicted according to its specific weight and its anisotropy. It is found that the non-linear regime of the macroscopic curve of the foam is not only due to the elastoplastic bending of the struts. The model is also extended to two-phase foams and the influence of the hollow struts is analysed. The two-phase foams model is finally applied to oxidized nickel foams and compared with experimental data. The strong increase in the rigidity of nickel foams with an increasing rate of oxidation, is well described by the model. However, a fracture criterion must also be introduced to take into account the oxide layer cracking.

A phenomenological compressible continuum plasticity model is also proposed and identified in tension. The identification of the model is carried out using experimental strain maps obtained by a photomechanical technique. A validation of the model is provided by investigating the strain field around a hole in a foam. The multiaxial model is extended to a micromorphic one to incorporate non local features accounting for the size effects observed for small holes. The prediction of the model is evaluated in the case of subsequent fracture of the specimen through crack propagation.

**Keywords : Metal Foams, Nickel, Open-Cells, Anisotropy, Tension, X-ray Tomography, Elastoplastic bending, Digital Image Correlation, Micromorphic Media.**

# Remerciements

Je souhaite adresser mes premiers remerciements aux partenaires de l'étude ainsi qu'à son coordinateur, Michel Mussino, pour la grande liberté dont j'ai bénéficié sur le projet MONICKE. Je tiens également à remercier Jean-Pierre Trottier, directeur du Centre des Matériaux, qui m'a accueilli et fait confiance, ainsi que Florin Paun, ingénieur de recherche à l'ONERA, qui a su me convaincre que j'avais le profil pour effectuer une thèse à l'Ecole des Mines de Paris.

Mes remerciements vont aussi aux membres du jury qui ont rapporté et examiné ce travail en détail. Merci à Andreas Mortensen qui a accepté d'endosser la double charge de rapporteur et de président, ainsi qu'à Jérôme Crépin pour l'intérêt qu'il a témoigné au monde merveilleux des mousses. Merci à Rémy Dendievel et à toute l'équipe pédagogique du GPM2, en particulier Luc Salvo, pour l'aide, la formation et le goût des matériaux qu'ils m'ont transmis. Enfin, je remercie chaleureusement Eric Maire pour les nuits passées au synchrotron de Grenoble, sa disponibilité et son esprit d'équipe.

Je remercie aussi Michel Croset, ancien dirigeant de la société NiTECH, pour sa réactivité et son soutien. Je le remercie pour le suivi constant et permanent dont il a fait preuve tout au long de cette étude.

Je tiens à remercier Yves Bienvenu pour l'autonomie qu'il m'a accordée mais aussi pour l'intérêt qu'il a porté au domaine de la mécanique abordé dans cette thèse.
Je souhaite témoigner de la profonde estime et de la sincère admiration que j'éprouve à l'égard de Samuel Forest. Travailler à ses côtés a été une aventure très riche d'enseignements où tout paraît facile et réalisable. Son enthousiasme et son dynamisme sont exemplaires et encouragent fortement à se transcender. Je le remercie vivement pour tous les efforts qu'il a consentis. Merci du fond du cœur Samuel car, sans toi, cette thèse ne serait pas ce qu'elle est devenue.

Je souhaite également remercier tout particulièrement Jean-Dominique Bartout pour son expérience et son aide précieuse. Sa rapidité d'exécution, son efficacité et son engagement sont des atouts qui ont largement contribué à l'avancée de cette thèse. Je le remercie de s'être toujours montré partant pour de nouvelles expériences et de n'avoir jamais rechigné à me voir recommencer mes manipulations. Je le remercie aussi pour toutes les idées échangées tant sur le plan expérimental que théorique. Plus que des connaissances, il m'a impreigné d'une certaine philosophie de la vie à travers ses maximes dont ma préférée restera : "la peur n'évite pas les dangers".

Je remercie aussi Franck N'Guyen pour tout le développement qu'il a effectué en analyse et en corrélation d'images, et pour le temps qu'il m'a consacré. Un grand merci à Trunks et Krilin, ses deux puissances de calcul, qui ont permis d'obtenir les résultats tridimensionnels.

Ce travail est aussi le fruit de nombreuses collaborations au sein des Ecoles des Mines. Je souhaite remercier Christian Lantuéjoul du Centre de Géostatistique de Fontainebleau pour les idées fructueuses que nous avons échangées. Je souhaite aussi remercier Patrick Ienny et Martial Giton du CMGD de leur accueil à l'Ecole des Mines d'Alès et de s'être toujours montrés disponibles pour répondre à mes questions.

Enfin, je dis merci à l'ensemble du personnel et des thésards qui m'ont aidé et qui ont contribué à rendre le Centre des Matériaux un lieu de travail agréable. Je remercie en particulier :

- Christophe Colin pour ses qualités humaines ;
- Maria Betbeder pour sa patience et tous les jolis court-métrages sur la déchirure des mousses ;
- Odile Adam pour m'avoir déniché un article de Lord Kelvin de 1887 (!!!) ;
- André Pineau pour ses discussions sur la rupture en "zig-zag" et sur l'arrivée de la première girafe en Europe ;
- René Locicero pour m'avoir appris la signification du mot "merge" ;
- Grégory Sainte-Luce pour m'avoir permis de conserver mes données malgré une fréquence de sauvegardes extrêmement faible ;
- Sylvain Flouriot pour sa disponibilité, son aide et son esprit d'équipe ;
- mes collègues de bureau, Caroline et Géraldine, pour m'avoir supporté ;
- Paulo, Florian, Gouby et Julien pour ne pas m'avoir laissé seul au stand grillade de la SNECMA ;
- tous les sportifs du Centre des Matériaux pour m'avoir permis de garder un semblant de forme ;
- et Hakim Benouali pour la continuité de l'activité mousse au Centre des Matériaux.

Je tiens tout particulièrement à remercier Arnaud Grosjean, le Steven Spielberg de ma thèse, pour tout le travail qu'il a accompli. Je le remercie de sa gentillesse, de tout le temps qu'il a bien voulu m'accorder et de son inconditionnel soutien. Mais je le remercie surtout pour sa façon bien à lui de dire toujours "oui".

Je remercie également Laurent Jeanfaivre, dit "Poussin", pour m'avoir pris en charge et guidé durant les dernières phases de ma rédaction et de ma soutenance. Je le remercie pour l'ensemble de ses conseils avisés et surtout de ne pas avoir renoncé à m'aider.

Je remercie aussi tous mes proches et tous mes amis de Toulouse, Grenoble et Paris, ceux qui ont fait le déplacement, ceux qui n'ont pas pu le faire, pour leur amitié et leur compréhension des impératifs de la thèse.

Comme l'occasion m'en est donnée, je tiens absolument à souligner ici la contribution considérable de ma famille dans ce travail de recherche. Sans mes parents, je ne serais jamais arrivé à ce niveau d'étude. Je tiens à leur témoigner toute ma gratitude pour tous les sacrifices qu'ils ont consentis à mon égard, et je les remercie notamment de m'avoir appris que : "lorsqu'on commence quelque chose, on le finit".

Je n'oublie évidemment pas le rôle prépondérant dans cette thèse qu'ont tenu Kris et Philou, ma sœur et mon beau-frère. Je les remercie de m'avoir logé, nourri, blanchi, soutenu, aidé ... tout cela à bras ouverts et avec le sourire.

Enfin, je remercie Stéphanie qui a eu la lourde tâche de partager ma dernière année de thèse. Je la remercie pour son soutien et son travail de l'ombre qui m'ont permis de me consacrer pleinement à ma fin de thèse. Merci d'avoir tout affronté sans jamais te plaindre, une part importante de ce travail te revient.

# Table des matières

**INTRODUCTION** **vii**
1. Contexte industriel : la société NiTECH . . . vii
2. Procédé de fabrication des mousses NiTECH . . . ix
2.1. Mousse de polyuréthanne initiale . . . ix
2.2. Prémétallisation de la mousse de polyuréthanne . . . xii
2.3. Nickelage électrochimique . . . xiii
2.4. Traitement thermique . . . xiv
3. Présentation du matériau . . . xvi
3.1. Taille des cellules . . . xviii
3.2. Grammage . . . xviii
3.3. Densité relative des mousses . . . xviii
3.4. Structure de la mousse de nickel . . . xix
4. Application industrielle des mousses de nickel . . . xxi
5. Objectifs de la thèse . . . xxii
6. Plan de la thèse . . . xxiii

**Partie A CARACTERISATION STRUCTURALE DES MOUSSES DE NICKEL A CELLULES OUVERTES** **1**

**I Etude morphologique et observation des mécanismes de déformation des mousses** **5**
I.1 Introduction . . . 7
I.2 Méthode expérimentale . . . 8
I.2.1 Procédé de fabrication des mousses . . . 8
I.2.2 Méthodologie des essais sous microtomographie aux rayons X . . . 8
I.2.3 Essais mécaniques in-situ . . . 10
I.3 Analyse d'images tridimensionnelles . . . 11
I.3.1 Méthode de segmentation tridimensionnelle des images . . . 11
I.3.2 Squelette et graphe tridimensionnels de la mousse . . . 11
I.4 Résultats . . . 13
I.4.1 Morphologie initiale des cellules . . . 13
I.4.2 Essai de traction in-situ suivant la direction RD . . . 20
I.4.3 Essai de traction in-situ suivant la direction TD . . . 23
I.4.4 Essai de compression in-situ suivant la direction ND . . . 26
I.5 Discussion . . . 29
I.5.1 Formes typiques des cellules : comparaison avec des bulles de savon . . . 29
I.5.2 Anisotropie géométrique et mécanique . . . 33
I.5.3 Evolution de l'orientation des cellules . . . 35
I.5.4 Endommagement et rupture des mousses . . . 41
I.6 Conclusions et perspectives . . . 44

**II Compléments sur la microstructure et l'endommagement des mousses de nickel 47**
II.1 Méthode de segmentation tridimensionnelle : cas des mousses de nickel à cellules ouvertes 48
II.1.1 Segmentation des cellules . . . 48
II.1.2 Comparaison avec un autre algorithme de segmentation tridimensionnelle . . . 50
II.2 Epaisseur des brins de nickel . . . 50
II.2.1 Ligne de Partage des Eaux . . . 51
II.2.2 Granulométrie par ouverture . . . 54
II.2.3 Erreur commise sur la mesure de l'épaisseur . . . 54
II.3 Surface réelle développée de la mousse de nickel . . . 55
II.3.1 Technique expérimentale . . . 55
II.3.2 Synthèse des résultats obtenus pour les différents types de mousse . . . 56
II.4 Mécanismes de rupture des mousses de nickel en traction . . . 57
II.5 Synthèse des principaux résultats de la première partie . . . 66

**Partie B COMPORTEMENT EN TRACTION DES MOUSSES DE NICKEL ET DES MOUSSES REVETUES 69**

**III Essais mécaniques – Traction uniaxiale des mousses de nickel à cellules ouvertes 73**
III.1 Anisotropie mécanique des mousses de nickel . . . 73
III.1.1 Comportement mécanique des mousses de nickel en fonction du grammage . . . 73
III.1.2 Module de Young $E^*$ de la mousse . . . 74
III.1.3 Module plastique $H^*$ de la mousse . . . 79
III.1.4 Limite d'élasticité $\sigma_0^*$ de la mousse . . . 81
III.2 Dispersion des essais mécaniques . . . 83
III.2.1 Dispersion sur le comportement mécanique . . . 83
III.2.2 Dispersion sur le comportement à rupture . . . 84
III.3 Influence de la vitesse sur le comportement mécanique . . . 84
III.4 Etude du comportement mécanique d'un feuillard de nickel . . . 86

**IV Modélisation du comportement uniaxial des mousses en traction 87**
IV.1 Eléments bibliographiques sur la modélisation du comportement mécanique des mousses . 88
IV.1.1 Modèle de Lederman (Lederman, 1971) . . . 88
IV.1.2 Modèle de Warren et Kraynik (Warren et Kraynik, 1991) . . . 89
IV.2 Modèle élastique – cellule anisotrope . . . 91
IV.2.1 Flexion élastique d'un brin de la mousse . . . 92
IV.2.2 Règles de changement d'échelle . . . 93
IV.2.3 Modèle de déformation élastique de la mousse . . . 94
IV.3 Modèle élastoplastique – cellule anisotrope . . . 101
IV.3.1 Flexion élastoplastique d'un brin de la mousse . . . 101
IV.3.2 Règles de changement d'échelle . . . 104
IV.3.3 Modèle de déformation élastoplastique de la mousse par flexion des brins . . . 104
IV.3.4 Expression de la limite d'élasticité $\sigma_0^*$ de la mousse . . . 107
IV.3.5 Expression du module plastique $H^*$ de la mousse . . . 108
IV.4 Cas des mousses à deux phases . . . 114
IV.4.1 Détermination de la flèche d'un brin composite "élastique/élastique" . . . 114
IV.4.2 Comportement de la mousse à deux phases : élastique/élastique . . . 116
IV.4.3 Détermination de la flèche d'un brin composite "élastoplastique/élastoplastique" . 117
IV.4.4 Comportement de la mousse à deux phases : élastoplastique/élastoplastique . . . 119
IV.5 Application des modèles à deux phases . . . 120

IV.5.1 Mousses à brins creux . . . . . 120
IV.5.2 Mousses à différents degrés d'oxydation . . . . . 124
IV.5.3 Rupture des mousses oxydées . . . . . 129
IV.6 Synthèse des principaux résultats de la deuxième partie . . . . . 138

**Partie C COMPORTEMENT MULTIAXIAL DES MOUSSES DE NICKEL 141**

**V Essais mécaniques – Comportement multiaxial des mousses de nickel à cellules ouvertes 145**
V.1 Contractions latérales des mousses : mesures tridirectionnelles par extensométrie traditionnelle . . . . . 145
V.1.1 Conditions expérimentales . . . . . 146
V.1.2 Coefficients d'expansion latérale plastique . . . . . 147
V.2 Mesures de champs par corrélation d'images : extensométrie sans contact . . . . . 150
V.2.1 Dispositif expérimental . . . . . 151
V.2.2 Champs de déformation d'une éprouvette rectangulaire de mousse . . . . . 153
V.2.3 Champs de déformation autour d'un trou "macroscopique" . . . . . 156

**VI Modélisation du comportement multiaxial des mousses de nickel à cellules ouvertes 159**
VI.1 Modèle élastoplastique continu compressible anisotrope . . . . . 159
VI.1.1 Présentation du modèle . . . . . 159
VI.1.2 Identification des paramètres du modèle . . . . . 161
VI.1.3 Application au problème du trou "macroscopique" dans une mousse . . . . . 162
VI.2 Présentation d'un modèle de milieu micromorphe élastoplastique compressible . . . . . 165
VI.2.1 Motivations . . . . . 165
VI.2.2 Degrés de liberté et équations de bilan . . . . . 165
VI.2.3 Lois de comportement . . . . . 167
VI.2.4 Mise en évidence d'une longueur interne . . . . . 168
VI.3 Problème d'un trou dans un milieu micromorphe . . . . . 170
VI.3.1 Effet d'échelle dans le cas d'un milieu micromorphe élastique . . . . . 170
VI.3.2 Identification de la longueur caractéristique dans le cas d'une mousse de nickel . . 170
VI.4 Application à la rupture des mousses de nickel . . . . . 175
VI.4.1 Identification d'un modèle simplifié d'endommagement dans le cas d'une bande de mousse en traction . . . . . 175
VI.4.2 Prédiction de la déchirure d'une mousse présentant une fissure horizontale . . . . 177
VI.5 Synthèse des principaux résultats de la troisième partie . . . . . 182

**CONCLUSIONS – PERSPECTIVES 187**

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 197**

**ANNEXES 199**

**A European Synchrotron Radiation Facility (ESRF) 201**
A.1 Présentation de l'ESRF . . . . . 201
A.2 Origine des rayons X . . . . . 202
A.3 Principe du rayonnement synchrotron . . . . . 202

A.4 Ligne de lumière ID19 . . . . . 203

**B Plan du dispositif de traction in–situ pour les essais sous tomographie aux rayons X 205**

**C Vocabulaire propre à l'analyse d'images 211**

**D Calcul de la surface réelle développée de la mousse 217**
D.1 Exploitation des résultats . . . . . 217
D.2 Calcul de l'incertitude sur la détermination de l'épaisseur moyenne des brins . . . . . 218

**E Programmes des modèles de flexion des poutres – Fichiers ZebFront 219**

**F Logiciel de corrélation d'images : principe et tests de validation 245**
F.1 Vocabulaire relatif au logiciel de corrélation d'images (CinEMA) . . . . . 245
F.2 Logiciel de corrélation d'images (CinEMA) . . . . . 247
F.2.1 Principe de la méthode d'intercorrélation d'images numériques . . . . . 247
F.2.2 Procédure de dépouillement des résultats . . . . . 248
F.2.3 Degrés de liberté : choix des paramètres . . . . . 250
F.3 Quantification de l'erreur expérimentale . . . . . 251
F.3.1 Erreur intrinsèque au logiciel de corrélation CinEMA . . . . . 251
F.3.2 Effet tridimensionnel des mousses . . . . . 255
F.3.3 Comparaison avec un autre logiciel de corrélation et un autre matériau . . . . . 258
F.4 Choix d'une résolution d'étude . . . . . 259
F.4.1 Influence du facteur d'échelle . . . . . 261
F.4.2 Influence du pavé d'approximation . . . . . 262

**G Expressions des contractions latérales lors d'un essai de traction simple – Modèle de plasticité continu compressible anisotrope 267**
G.1 Sollicitation suivant l'axe 1 . . . . . 268
G.2 Sollicitation suivant l'axe 2 . . . . . 269

# INTRODUCTION

Les solides cellulaires sont des matériaux dont la porosité excède typiquement 70 % du volume. De tels matériaux peuvent être décrits comme un assemblage de cellules vides, chacune étant entourée par des arêtes ou des parois solides. Les mousses de nickel, étudiées au cours de ce travail de recherche, sont des mousses à cellules ouvertes dont la porosité dépasse 96 % du volume.

La problématique des mousses de nickel a débuté au Centre des Matériaux en 1997 pour répondre aux interrogations de la société NiTECH, P.M.E. d'une quarantaine de personnes, basée à Saint Chamond. Au cours d'un stage qui a duré trois mois, Bourgin modélise le comportement mécanique des mousses de nickel à l'aide d'un modèle de barres sollicitées en traction (Bourgin et al., 1997), suivant d'ailleurs la voie tracée par Bernet, l'un des fondateurs de la société NiTECH. Le passage du comportement d'un brin à celui de la mousse se fait alors par intégration sur l'ensemble des orientations possibles. Puis, en 1999, un nouveau stage de quatre mois est lancé en partenariat avec la société NiTECH (Badiche et al., 1999). Badiche s'intéresse aux propriétés électriques et mécaniques des mousses à cellules ouvertes. Il étudie un large spectre de mousses, et identifie, en fonction de la densité relative de la mousse, les constantes des lois d'évolution des propriétés établies par Gibson et Ashby (Gibson et Ashby, 1997). A l'aide de champs de déformation réalisés par corrélation d'images à l'Ecole des Mines d'Alès, il mesure les coefficients de dilatation latérale de plusieurs mousses et trouve des hétérogénéités de déformation de l'ordre de 2 %. Sur la base de cette collaboration répétée avec la société NiTECH naît l'idée d'une thèse sur le comportement mécanique des mousses de nickel, pour approfondir les phénomènes de déformation et en extraire une modélisation plus complète. Un contrat est alors conclu avec le Ministère de l'Industrie : le projet MONICKE, dans lequel la société NiTECH est partenaire et fournisseur de la matière première, la mousse de nickel. Au niveau de l'entreprise, ce contrat s'inscrit dans le projet NiTECH 2000, destiné à fournir à la société NiTECH une avance technologique sur la concurrence asiatique.

## 1. Contexte industriel : la société NiTECH

Au commencement de cette thèse, en octobre 2000, la société NiTECH, seul fabricant européen de mousses de nickel à cellules ouvertes, initialement née du développement d'une unité CNRS et portée par Suez Industrie pendant quelques années, appartenait au groupe néerlandais Stork, fabricant entre autres d'écrans de sérigraphie.

Les mousses de nickel à cellules ouvertes, fabriquées par NiTECH, sont destinées au marché des batteries de type nickel–cadmium (Ni-Cd) ou nickel–hydrure métallique (Ni-MH). Elles servent de support de l'électrode positive dans la batterie (voir section 4.). Cependant, le marché des mousses de nickel et des batteries est fortement concurrentiel. Les trois principaux types de concurrence sont de nature conjoncturelle, technologique et industrielle. Comme le montre la figure .1a, les batteries Ni-MH étaient, dans les années 2000, majoritairement employées dans les téléphones cellulaires. Or, la baisse d'activité dans le secteur de la téléphonie portable a contraint les fabricants de piles et de mousses de nickel à se diversifier et à envisager de nouveaux débouchés (voir figure .1b).
De plus, l'émergence de nouvelles technologies, telles que les batteries Li-Ion ou Li-Polymère, a réduit les parts de marché ouvertes aux mousses de nickel dans les batteries portables (voir figure .2).
Enfin, de nouveaux fabricants de mousses de nickel, localisés en Asie où les coûts de main d'œuvre sont moins élevés, sont apparus sur le marché.

Dans ce marché très concurrentiel, le prix de vente de la mousse de nickel n'a cessé de diminuer depuis 1995 (voir tableau .1). Il a chuté de 35 \$/m² à 13 \$/m².

Pour rester compétitif dans ce domaine, la société NiTECH s'est donc intéressée aux secteurs sur lesquels elle pouvait réaliser des économies. L'analyse du prix de revient de la mousse de nickel (voir figure .3) montre que les principales dépenses mises en jeu lors de l'élaboration de la mousse concernent

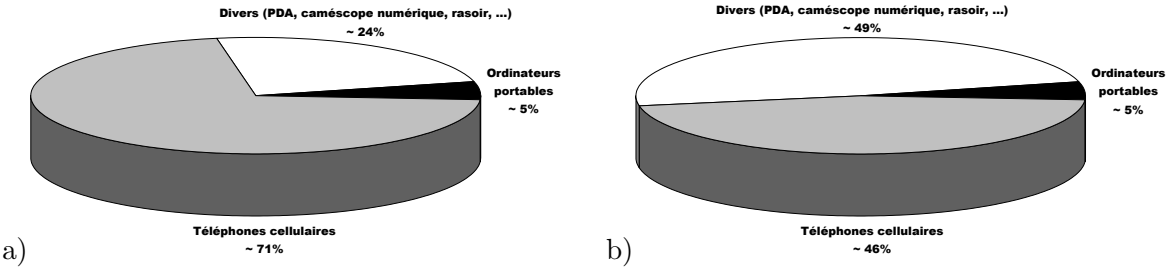



**Figure .1** : Répartition du marché pour les batteries Ni-MH (Pillot, 2003) : a) année 2000, b) année 2002.

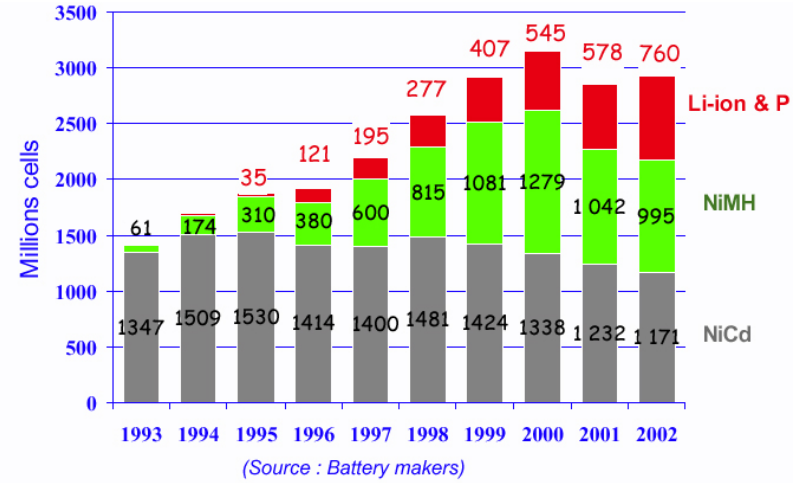



**Figure .2** : Emergence de nouvelles technologies de batteries portables (Pillot, 2003).

| Année | 1995 | 1998 | 1999 | 2000 | 2003 |
|---|---|---|---|---|---|
| Prix de vente ($/m$^2$) | 35 | 22 | 19 | 15 | $\sim$ 13 |

**Tableau .1** : Prix de vente des mousses de nickel à cellules ouvertes en fonction des années.

la consommation de matière première (30 %) et la main d'œuvre (27 %). Forte de cette constatation et pour faire face à la concurrence, la société NiTECH a décidé d'améliorer les propriétés mécaniques des mousses et d'augmenter la productivité à effectif constant.

Le projet MONICKE a donc été mis en œuvre dans cette optique. Les partenaires du projet sont la société NiTECH, l'Ecole des Mines et la société HEF, spécialisée dans l'ingénierie des surfaces. Le groupe HEF (Hydromécanique Et Frottement), crée en 1953, fait partie des entreprises pionnières en France dans le domaine des techniques PVD. L'objectif du projet MONICKE consiste à réduire la quantité de nickel mise en jeu tout en respectant les spécifications clients, ce qui implique :

- l'amélioration des propriétés mécaniques ;
- l'ajustement de la quantité de nickel en fonction des propriétés mécaniques souhaitées.

Pour ce faire, une connaissance approfondie des relations propriétés-microstructure ainsi qu'une modélisation du comportement mécanique des mousses sont indispensables. Ces deux aspects vont être particulièrement détaillés tout au long de cette thèse.

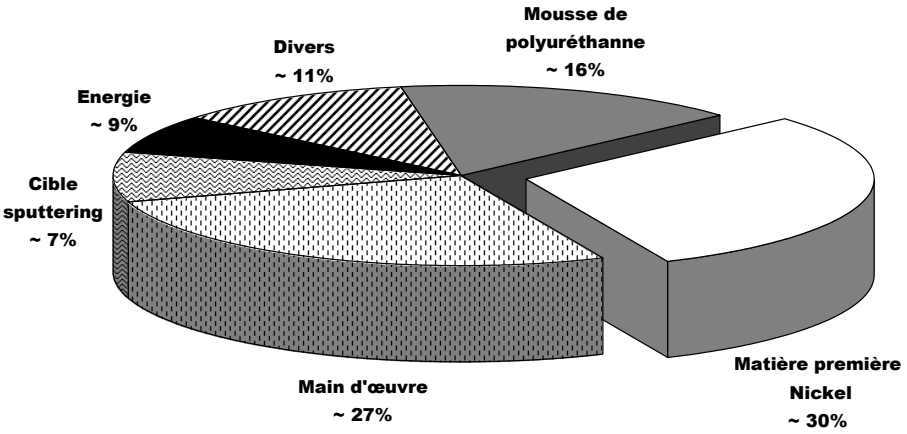



**Figure .3** : Prix de revient des mousses de nickel.

## 2. Procédé de fabrication des mousses NiTECH

Le procédé de fabrication des mousses de nickel de la société NiTECH est discontinu. Cinq étapes bien distinctes constituent ce mode opératoire :

1. élaboration et mise en forme de la mousse précurseur en polyuréthanne (PU) ;
2. prémétallisation de la mousse de PU ;
3. nickelage électrochimique ;
4. traitements thermiques (élimination de la mousse de PU puis recuit réducteur fixant la qualité métallurgique du nickel) ;
5. contrôle qualité et conditionnement pour l'exportation (essentiellement en Asie).

Dans le souci de mieux définir les particularités des mousses de nickel à cellules ouvertes de la société NiTECH, les premiers points du procédé sont expliqués en détails dans les quatre sections suivantes.

Au cours de ce mémoire, la même convention est utilisée. Le sens RD correspond au sens de défilement des rouleaux lors du procédé de fabrication de la mousse. La direction transverse et normale à la "plaque" de mousse sont respectivement notées TD et ND.

### 2.1. Mousse de polyuréthanne initiale

La mousse de polyuréthanne, fabriquée par la société Recticel en Belgique, est issue d'une technique de moussage (voir figure .4). Trois agents sont alors mélangés : un isocyanate (toluène di-isocyanate), un polyol (éthylène glycol) et un agent tensio-actif (agent siliconé), qui permet l'obtention d'un moussage homogène. Une amine tertiaire sert de catalyseur à la réaction de bullage.
Les agents sont déposés sur un tapis, sur lequel la mousse se développe. Une fois arrivée à maturation, la mousse est découpée en bloc parallélépipédique. La désoperculation de la mousse est réalisée au moyen de micro-détonations (réaction air/hydrogène). La mousse de polyuréthanne, qui sert de réplique aux mousses de nickel, est alors une mousse à cellules ouvertes.

Deux modes de découpe des blocs de polyuréthanne sont possibles (voir figure .5). Le polyuréthanne peut être soit pelé ("peeling"), soit déroulé ("loop slitting").

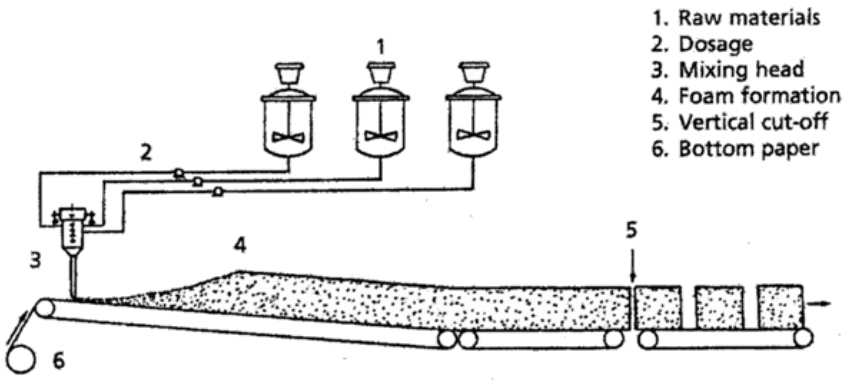



**Figure .4** : Procédé de fabrication d'une mousse de polyuréthanne.

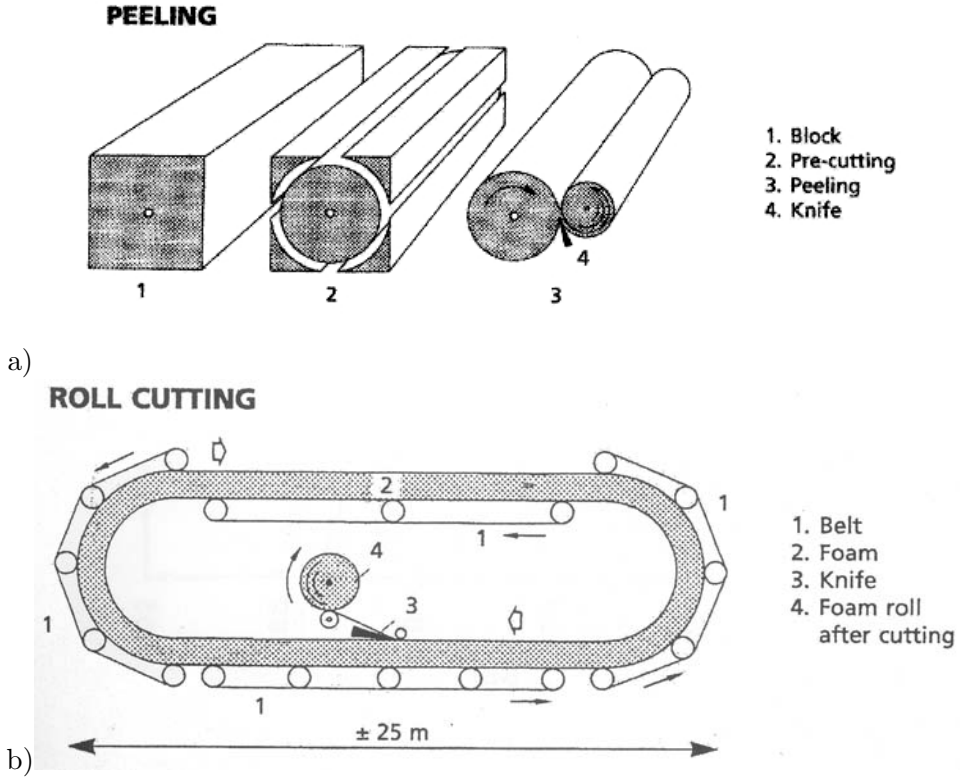



**Figure .5** : Modes de découpe du bloc de polyuréthanne : a) peeling, b) loop slitting.

Le polyuréthanne pelé est extrait d'un bloc de polyuréthanne de dimensions $0,5 \times 0,5 \times 1,2$ m$^3$. Le bloc est positionné sur un mandrin. A l'aide d'un couteau, le bloc est rendu cylindrique, puis une feuille de 1 à 2 millimètres d'épaisseur est découpée. Un rouleau de mousse de polyuréthanne de 100 mètres de long et de 1 à 2 millimètres d'épaisseur est alors constitué. Il présente une anisotropie "périodique" dans la forme des cellules. En effet, compte tenu du procédé de bullage et de la gravité, quatre zones bien distinctes peuvent être observées dans le bloc de polyuréthanne (voir figure .6). Chaque zone se voit attribuée le nom du point cardinal correspondant. Ce vocabulaire est celui de l'élaborateur de la mousse de polyuréthanne. Le Nord correspond à un prélèvement au sommet du bloc de polyuréthanne,

le Sud à la base, l'Est et l'Ouest (équivalents) au milieu du bloc mais selon un plan vertical. Les zones Nord et Sud possèdent des bulles sphériques suivant le plan (RD, TD) tandis que les zones Est et Ouest ont des cellules elliptiques suivant ce même plan. La mousse de polyuréthanne pelé présente donc une succession de zones à bulles rondes et allongées. Plus le diamètre du bloc de polyuréthanne diminue lors de la découpe, plus l'alternance entre les zones devient rapide. Pour s'affranchir de cette anisotropie du rouleau de polyuréthanne, toutes les éprouvettes testées mécaniquement et étudiées dans cette thèse sont prélevées en zone Nord.

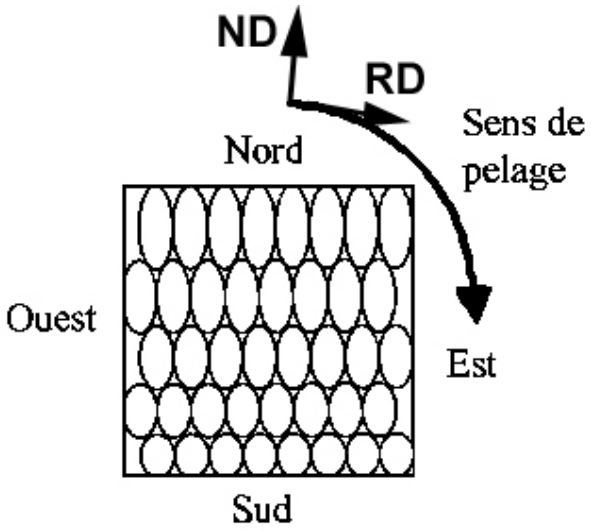



**Figure .6** : Différentes zones du bloc de polyuréthanne pelé.

Le polyuréthanne déroulé est, quant à lui, obtenu à partir d'un bloc de polyuréthanne de dimensions $1,2 \times 0,5 \times 60$ m$^3$. Les deux extrémités du bloc de mousse parallélépipédique sont repliées l'une sur l'autre et soudées entre elles. La mousse est ensuite découpée au moyen d'un couteau. Au lieu d'avoir un mode de découpe circulaire comme pour le polyuréthanne pelé, le bloc de polyuréthanne est ici découpé en tranches parallèles. Le polyuréthanne déroulé possède donc une structure plus isotrope. Cependant, le défaut d'un tel produit réside dans la longueur maximale du rouleau obtenu (60 mètres). La fabrication de rouleaux de plus grande longueur n'est possible que par soudure de plusieurs blocs entre eux.

Pour une même longueur de mousse réalisée, les rouleaux de polyuréthanne déroulé requièrent presque deux fois plus de main d'œuvre. Or, le procédé de fabrication de la mousse de nickel n'étant pas continu, l'obtention du produit final nécessite de nombreuses manipulations, qui se traduisent par une augmentation du coût. La production de mousse de nickel issue de mousse de polyuréthanne déroulé reste donc marginale. De plus, les propriétés mécaniques des mousses "loop slitting" et des mousses prélevées en zone Nord sont identiques. Pour toutes ces raisons, le choix des échantillons servant de base à cette étude s'est porté sur des éprouvettes issues du polyuréthanne pelé, et prélevées en zone Nord.

La structure de la mousse de polyuréthanne initiale est un paramètre déterminant pour les fabricants de mousses de nickel. En effet, les constructeurs de batteries, comme Saft et Varta, exigent une bonne maîtrise de la porosité. Ainsi, chaque batterie possède la même énergie et la même puissance. La porosité des mousses de nickel est dictée par celle de la mousse polymère, qui sert de précurseur.

La société NiTECH tolère une dispersion de 10 % dans la taille des cellules de la mousse de polyuréthanne. Le paragraphe a) de la page 13 reviendra sur cette valeur. Pour obtenir cette faible dispersion, la société Recticel limite le procédé de moussage et empêche l'étape de coalescence des bulles.

La limitation du procédé de moussage réduit la gamme des tailles de cellules disponibles. Seules des cellules de petite taille – jusqu'à 500 $\mu$m de diamètre – sont obtenues avec une dispersion aussi faible.

## 2.2. Prémétallisation de la mousse de polyuréthanne

La mousse de polyuréthanne, enroulée sur un mandrin, est introduite par le bas dans le pulvérisateur magnétron sous un vide peu poussé ("sputtering"), pour être ensuite déroulée puis enroulée dans le réservoir du haut (voir figure .7a-b). Entre temps, la mousse passe par la partie centrale où a lieu la prémétallisation. La prémétallisation est réalisée par pulvérisation cathodique (voir figure .7c). L'objectif de cette étape revient à déposer une faible couche de nickel (0,1 $\mu$m) sous de faibles pressions ($10^{-1}$ à 1 Pa) pour rendre la mousse conductrice (voir figure .8). Le rouleau effectue quatre passages devant les cibles, projetant des atomes de nickel dans un plasma d'argon.

Les électrons sont émis par la cathode et accélérés par le champ électrique. Ils percutent les atomes d'argon Ar et les ionisent. Les ions argons $Ar^+$ sont accélérés et percutent la cible de nickel. Ils arrachent ainsi un atome de nickel qui vient se déposer sur la mousse de polyuréthanne.

La société NiTECH superpose au champ électrique un champ magnétique perpendiculaire. Ainsi, les trajectoires des électrons s'enroulent autour des lignes de champs hélicoïdales. Les électrons parcourent donc une distance plus grande et ionisent plus d'atomes de gaz. Toutefois, seul 10 % du volume des cibles de nickel, correspondant à six heures d'utilisation, sont utilisées. A cause des propriétés magnétiques du nickel, une détérioration sélective des cibles apparaît. Des sillons se forment et la durée de vie des cibles est réduite.

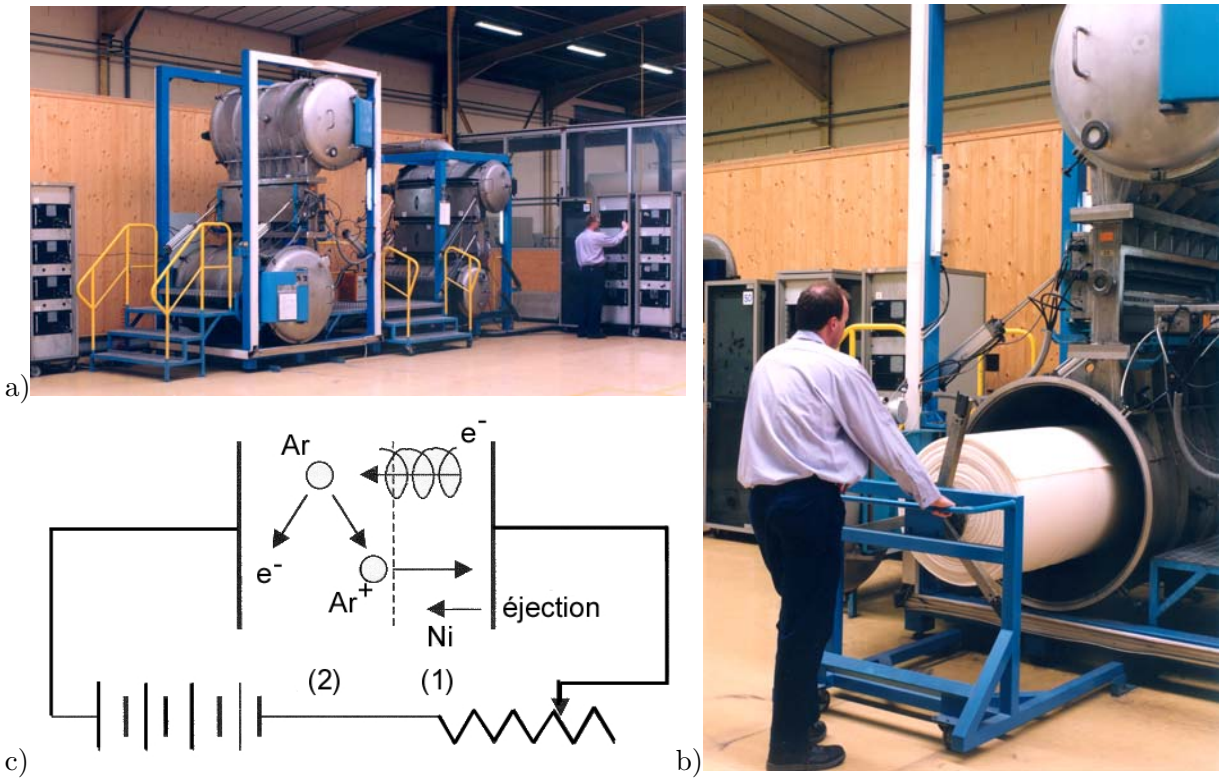
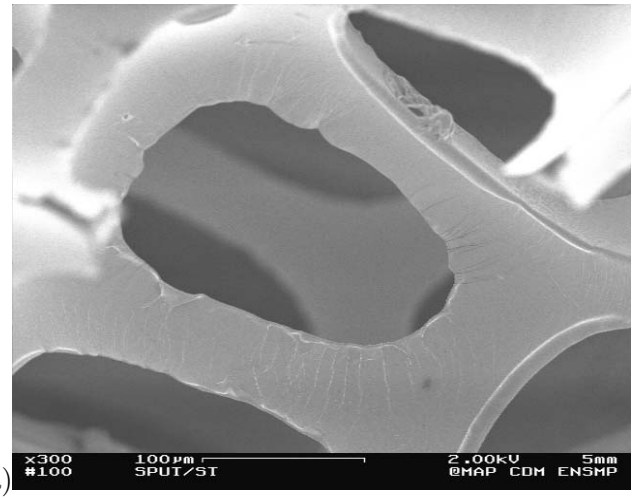



**Figure .7** : Etape de prémétallisation : a) et b) appareil de prémétallisation de la mousse de polyuréthanne, c) procédé de pulvérisation cathodique.

L'état de surface de la mousse de polyuréthanne prémétallisé est représenté sur la figure .8. L'observation de cette photographie fait apparaître que la fine couche de nickel est fissurée à plusieurs endroits.

a) 

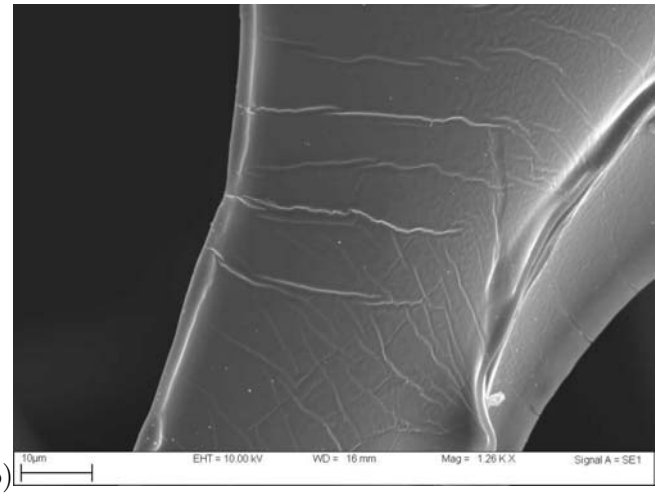
b) 


**Figure .8** : Etat de surface de la mousse de polyuréthanne prémétallisé : a) ensemble de brins (Badiche et al., 1999), b) brin (Goussery, 2004).

## 2.3. Nickelage électrochimique

La mousse de polyuréthanne prémétallisé est ensuite amenée sur l'électrolyseur (voir figure .9a). Cette étape dure environ une journée. Elle se décompose en trois parties :

- positionnement du rouleau et régime transitoire ($\sim$ 2 heures) ;
- fonctionnement stabilisé ;
- déchargement du rouleau et remplissage des paniers ($\sim$ 2 heures).

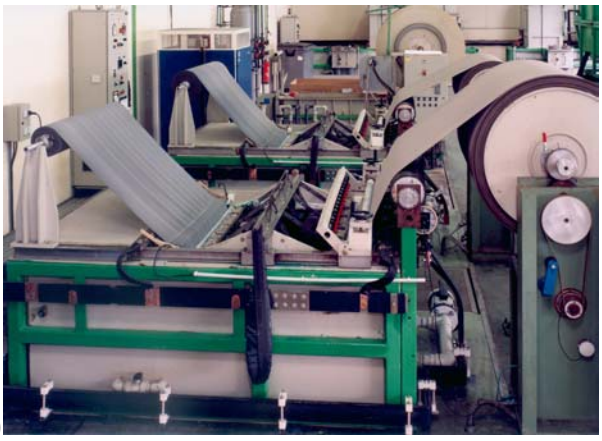
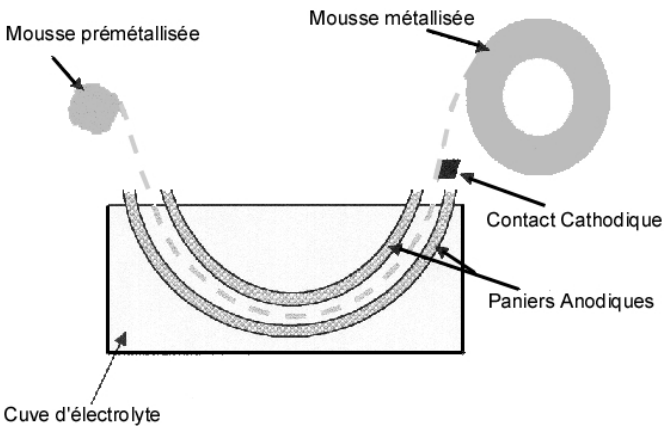
a) 
b) 


**Figure .9** : Nickelage électrochimique : a) électrolyseur, b) schéma de principe.

Le nickelage électrochimique s'avère une étape délicate du procédé de fabrication des mousses de nickel. En effet, après avoir positionné le rouleau de polyuréthanne prémétallisé entre les deux paniers

cylindriques, le courant doit être injecté progressivement à partir de la cathode (voir figure .9b). La cathode en cuivre reste en contact avec l'extrémité sortante du rouleau. La mousse de polyuréthanne prémétallisé se dissout alors à l'entrée de l'électrolyseur sur une longueur de 10 à 20 cm, ce qui a pour effet d'augmenter la résistance électrique et d'empêcher le dépôt électrolytique.

La masse surfacique de la mousse de nickel à la sortie de l'électrolyseur est proportionnelle à la quantité de courant $i$ et à la vitesse de défilement $v$ du rouleau. Cette grandeur physique, appelée grammage (voir section 3.2.), répond à la loi de Faraday :

$$\text{grammage} = k\ \frac{i}{v} \tag{.1}$$

où $k$ dépend de la longueur de parcours dans la cuve, et de la largeur du rouleau.

L'épaisseur du dépôt électrolytique déposé est de l'ordre de 10 $\mu$m. Toutefois, la phase de démarrage de l'électrolyseur se montre plus consommatrice en nickel, et 5 à 10 mètres de produit sont perdus puisqu'ils ne possèdent pas le bon grammage.

Les paniers cylindriques en titane sont remplis de billes de nickel qui jouent le rôle d'anode soluble. Les billes de nickel doivent donc être uniformément réparties afin d'obtenir un produit plus homogène. L'électrolyte est un bain de sulfamate de nickel $Ni(NH_2SO_3)_2$. Le bain contient aussi du chlore pour limiter la passivation des électrodes, et du bore qui agit comme tampon. Un rinçage en sortie du bain permet d'éliminer les produits actifs présents dans la mousse.

*Remarque : la fabrication d'un rouleau de type pelé (120* $m^2$*) d'une mousse de nickel de grammage standard 500* $g/m^2$ *consomme 60* kg *de billes de nickel.*

Le procédé de nickelage électrochimique introduit une différence de grammage dans l'épaisseur de la mousse de nickel. La mousse est moins chargée en nickel à cœur plutôt que sur les bords. Cette hétérogénéité du dépôt provient du mauvais renouvellement des ions nickel au cœur de la mousse prémétallisée. Ils sont moins nombreux car leur pénétration est plus difficile. Cette différence de grammage est caractérisée par le TDR (Thickness Deposit Ratio), qui s'exprime comme le rapport entre les épaisseurs à la surface ($t_e$) et à cœur ($t_i$).

$$\text{TDR} = \frac{t_e}{t_i} \tag{.2}$$

La valeur du TDR est généralement égale à 1,5 pour les mousses de nickel standard (voir section II.2).

L'état de surface de la mousse en sortie de l'électrolyseur est présenté sur la figure .10. Le nickel se dépose sur la surface des brins en formant de petites pyramides. La hauteur des pyramides est d'environ 2 $\mu$m. La figure .10a-b permet d'observer qu'à l'intérieur des brins, la mousse de polyuréthanne sert de réplique à la mousse de nickel.

### 2.4. Traitement thermique

Après l'étape de l'électrolyse, la mousse est introduite dans un four de traitement thermique. Le traitement thermique s'articule autour de deux parties :

- pyrolyse de la mousse de polyuréthanne ;
- recuit de la mousse de nickel oxydée.

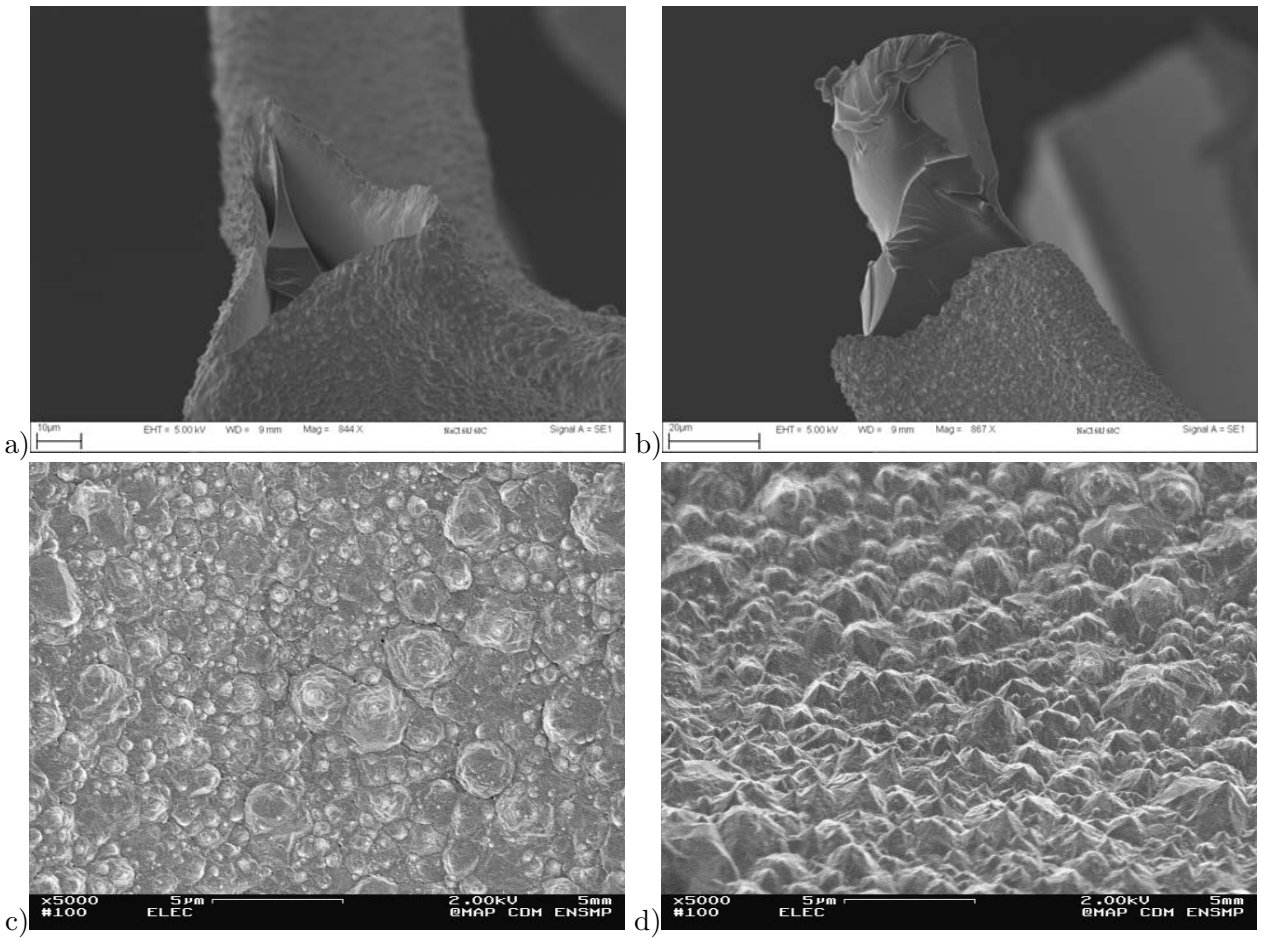



**Figure .10** : Etat de surface des mousses après l'étape d'électrolyse : a) et b) brins rompus, c) vue de dessus de la surface extérieure d'un brin (Badiche et al., 1999), d) incidence rasante de la surface extérieure d'un brin (Badiche et al., 1999)

La mousse est placée sur un tapis et traverse successivement deux fours. L'étape de pyrolyse est réalisée pendant trois minutes sous air, dans le premier four, chauffé à 500°C . Cette première phase permet de brûler complètement le polymère. Comme le montre la figure .11, les surfaces externe et interne des brins sont oxydées. On peut aussi constater que la surface extérieure possède toujours l'aspect rugueux du nickel électrodéposé. Les sommets des petites pyramides s'aplanissent lors du traitement de recuit. Les pyramides deviennent alors des petites bosses, et les grains sont de plus en plus marqués, ce qu'illustre la figure .12.

Le traitement de recuit est effectué pendant quelques minutes sous atmosphère réductrice (20 % d'hydrogène et 80 % d'argon) à 950°C . Cette procédure permet de réduire la couche d'oxyde formée pendant l'étape de pyrolyse et d'améliorer les propriétés mécaniques. Sur la figure .13, le comportement mécanique d'une mousse MN 110-042-16 (voir section 3.) est représenté après l'étape d'électrolyse, de pyrolyse et de recuit. Sur ce graphe, les mousses de nickel présentent une forte anisotropie mécanique dès la sortie de l'électrolyseur. Cette anisotropie est conservée jusqu'à la fin du procédé. Le comportement mécanique des mousses en traction se décompose en trois phases : une partie linéaire élastique, un régime non linéaire, et un écrouissage quasi-linéaire. La mousse en sortie de l'électrolyseur ne présente pas d'écrouissage quasi-linéaire. Le traitement thermique permet de gagner un facteur 5 sur la déformation à rupture dans les deux sens de prélèvement des éprouvettes. Simultanément, la contrainte à rupture

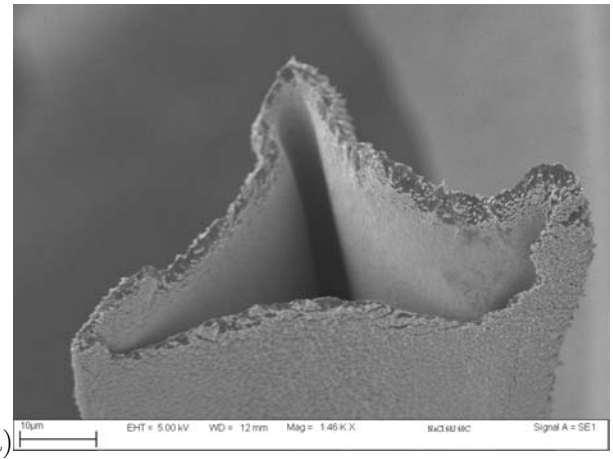
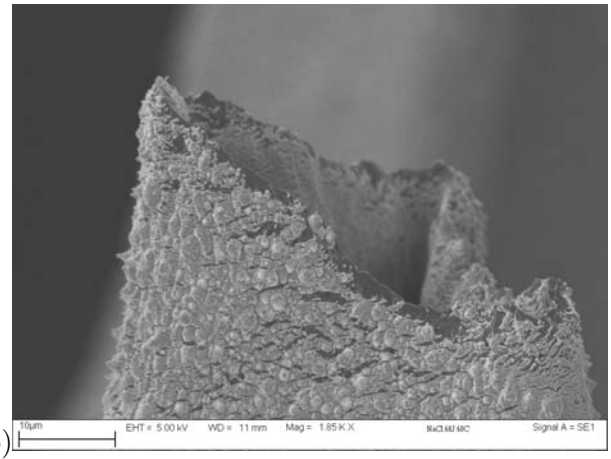
a)  b) 

**Figure .11** : Etat de surface des mousses après l'étape de pyrolyse.

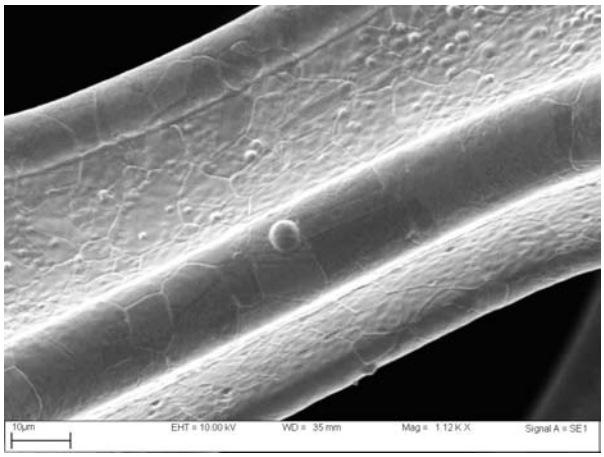


**Figure .12** : Etat de surface des mousses après recuit (Goussery, 2004).

chute du même facteur. La figure .13 permet aussi de remarquer qu'une rupture ductile (mousse après pyrolyse et après recuit) succède à une rupture fragile (mousse en sortie de l'électrolyseur).

*Remarque : dans ce travail, seul le comportement mécanique des mousses après recuit est analysé.*

En conclusion de cette section, les différentes étapes du procédé de fabrication des mousses sont rappelées dans le tableau .2. En effet, comme le montrera la suite de ce mémoire, une vision claire du procédé de fabrication est essentielle pour comprendre l'influence profonde que le procédé exerce sur le comportement mécanique résultant des mousses.

## 3. Présentation du matériau

Les principales grandeurs utilisées pour caractériser les matériaux poreux sont introduites dans cette section. Commercialement, les mousses NiTECH sont définies à l'aide de trois paramètres :

- la taille des cellules (PPI) ;
- le grammage ;
- l'épaisseur du produit.

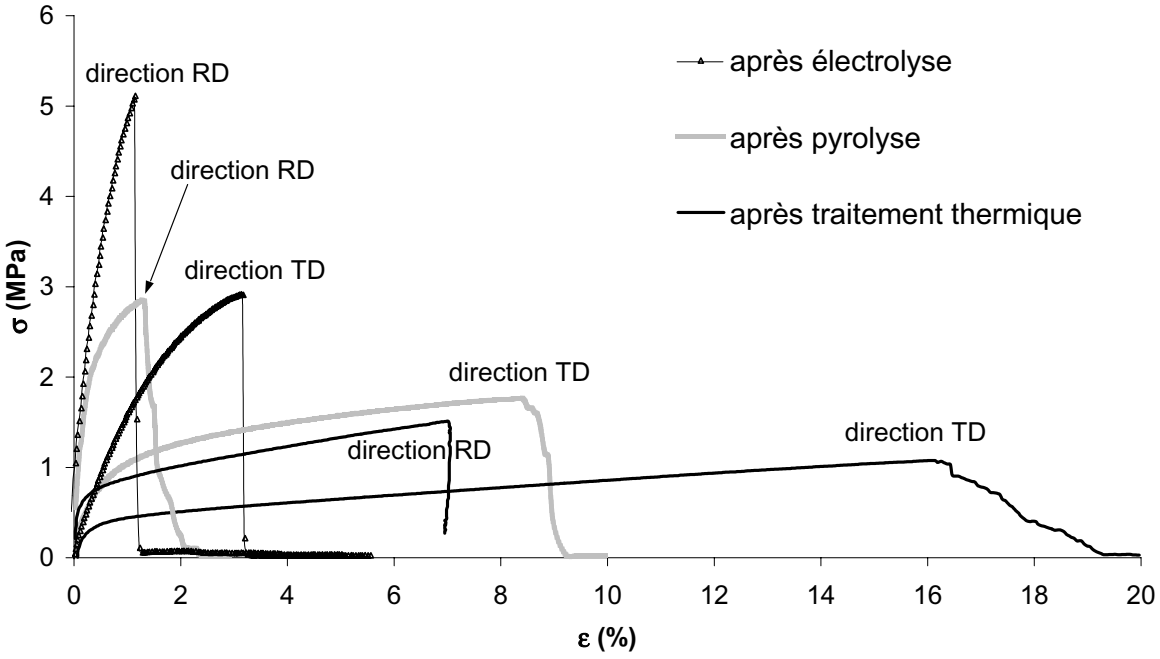



**Figure .13** : Comportement mécanique des mousses de nickel après chaque étape du procédé.

| Etape | Objectif | Principe |
|---|---|---|
| Prémétallisation | – rendre la mousse de polyuréthanne conductrice | – pulvérisation cathodique<br>– dépôt de 0,1 $\mu$m de nickel |
| Nickelage électrochimique | faire croître le dépôt de nickel | électrolyse :<br>– bain de sulfamate de nickel<br>– anode soluble (billes de nickel) |
| Pyrolyse | éliminer le polymère | four à 600°C sous air |
| Recuit | – réduire les oxydes<br>– améliorer la ductilité | – four à 950°C<br>– atmosphère réductrice |

**Tableau .2** : Tableau récapitulatif des principales étapes du processus de fabrication des mousses de nickel.

Pour classifier leurs différents produits, la société NiTECH a mis en place une codification dans l'appellation des mousses. Ce système de dénomination est utilisée pour cette étude afin de bien spécifier les échantillons employés. Le nom d'une mousse NiTECH est formulé à partir de quatre règles. Un exemple d'identification d'une mousse standard peut s'écrire : MN 110–050–16.

Les premières lettres signifient :

- M pour mousse ;
- N pour nickel.

On peut aussi trouver un S pour indiquer que la mousse de polyuréthanne initiale est déroulée ("loop slitting").

*Remarque : les différentes zones du polyuréthanne pelé ne sont pas précisées dans le nom de la mousse. Toutefois, ici, seuls des échantillons prélevés en zone Nord ont été étudiés.*

Les trois autres nombres indiquent respectivement :

- le PPI (110) ;
- le grammage (050 correspond à 500 g/m$^2$) ;
- l'épaisseur de la mousse (16 correspond à 1,6 mm).

*Remarque : l'épaisseur des mousses NiTECH est définie à 2 % près (Badiche et al., 1999).*

### 3.1. Taille des cellules

La taille des cellules des mousses est traditionnellement exprimée par le nombre de pores par inch (PPI). Le nombre de PPI représente le nombre de pores traversés par un segment de longueur 1 inch (=2,54 cm). Sa valeur est directement mesurée sur des photographies bidimensionnelles.

Les mousses standards ont un PPI de 110, ce qui correspond à une taille de cellules de l'ordre de 500 $\mu$m.

*Remarque : cette porosité, qui doit être interprétée comme une quantité globale caractérisant la mousse, est qualifiée d'"externe". Les brins délimitant les faces des cellules sont eux-mêmes poreux (creux), mais cette porosité additionnelle est considérée comme "interne".*

### 3.2. Grammage

Le grammage définit la masse surfacique de la mousse, *i.e.* la quantité de nickel déposée par unité de surface. Son unité est le gramme par mètre carré (g/m$^2$). Trois grammages distincts ont été utilisés pour cette thèse : 350, 420, et 500 g/m$^2$.

Le grammage est un terme employé par la société NiTECH pour préciser les propriétés des mousses. Dans notre cas, toutes les mousses étudiées possèdent la même épaisseur (1,6 mm). Parler de grammage ou de densité relative est donc équivalent (voir section 3.3.).

*Remarque : les grammages NiTECH sont définis à 5 % près. Une mousse de 500 g/m$^2$ correspond donc à 500 g/m$^2$ $\pm$ 25 g/m$^2$.*

### 3.3. Densité relative des mousses

La densité relative de la mousse $\Phi$, qui se définit comme le rapport entre la densité de la mousse $\rho^*$ et celle du nickel $\rho_{Ni}$, constitue la caractéristique principale d'un matériau cellulaire. Par exemple, Gibson et Ashby (Gibson et Ashby, 1997) modélisent le comportement des mousses en ramenant les grandeurs mécaniques (module de Young, module de cisaillement, limite d'élasticité ...) à la densité relative. La densité relative de la mousse peut être formulée à partir du grammage :

$$\Phi = \frac{\rho^*}{\rho_{Ni}} = \frac{\text{grammage}}{(\text{épaisseur mousse})\ \rho_{Ni}} \qquad (.3)$$

Les densités de la mousse correspondant aux trois grammages étudiés sont données dans le tableau .3. La densité relative des mousses de nickel est de l'ordre de 3 %. Les mousses de nickel possèdent donc 97 % de "vide" (somme des porosités externe et interne).

*Rappel : la densité du nickel est de* 8908 kg/m$^3$.

| Type de mousse | Grammage ($g/m^2$) | Densité ($kg/m^3$) | Densité relative |
|---|---|---|---|
| MN 110-035-16 | 350 | 208 | 0,024 |
| MN 110-042-16 | 420 | 250 | 0,029 |
| MN 110-050-16 | 500 | 298 | 0,035 |

**Tableau .3** : Densité des mousses de nickel à cellules ouvertes.

### 3.4. Structure de la mousse de nickel

Dans le but de se faire une idée plus précise de la structure générale des mousses de nickel, quelques ordres de grandeur déterminés à partir de photographies obtenues sous microscope électronique à balayage (MEB), sont fournis ici. Ces données permettent de se familiariser avec l'architecture des mousses NiTECH. Le chapitre I présente une étude tridimensionnelle des principales grandeurs, réalisée de façon plus détaillée et plus complète.

La figure .14 montre l'aspect général des mousses de nickel à cellules ouvertes. La mousse est constituée d'un réseau de brins interconnectés, qui forment des cellules. Pour une mousse standard, la taille des cellules est de l'ordre de 500 $\mu$m et la longueur des brins mesure environ 180 $\mu$m (voir figure .14).

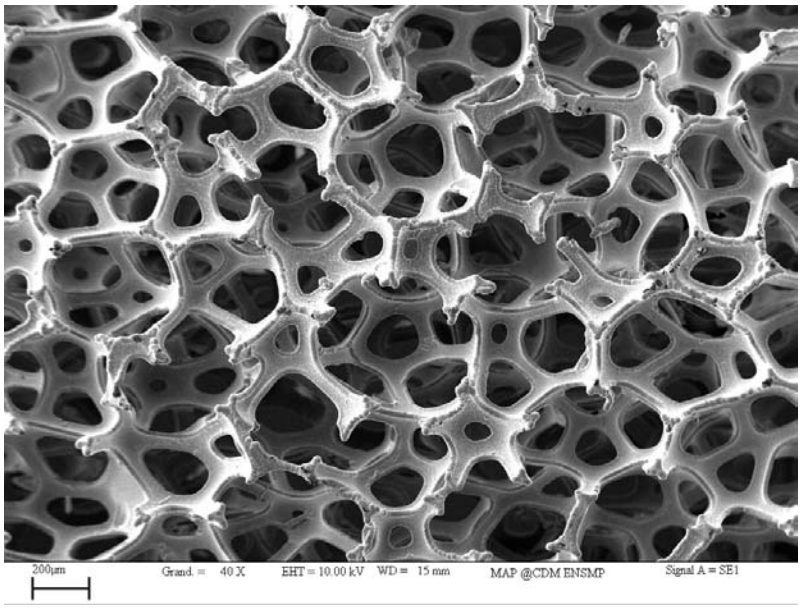
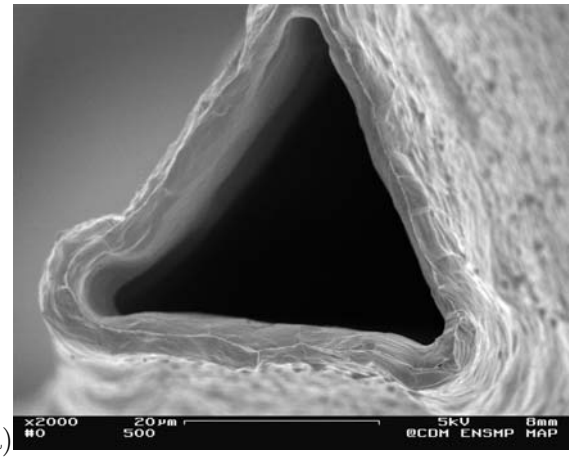



**Figure .14** : Vue générale de la mousse de nickel à cellules ouvertes.

Les brins sont à section triangulaire. La figure .15 illustre leur forme en bordure de Plateau (du nom du savant Plateau, qui est un des premiers à s'être intéressé à la structure des mousses organiques (Plateau, 1873)). Cette forme particulière en "triangle curviligne" provient du procédé de bullage, employée pour la fabrication de la mousse de polyuréthanne initiale. La longueur du côté du triangle est de l'ordre de 70 $\mu$m, et l'épaisseur des parois des brins est de 10 $\mu$m. L'intérieur des brins est creux car la mousse de polyuréthanne a été pyrolysée.

*Remarque : l'étude réalisée par Jean-Dominique Bartout (Bartout, 2002) montre que, pour une mousse de nickel standard, la porosité "interne" représente environ 2 % de la porosité globale.*

On peut remarquer que les brins comportent aussi des bourrelets aux sommets des triangles. Les sommets des triangles se caractérisent par une épaisseur de nickel plus importante. Ce phénomène est dû, lors de l'électrolyse, à un effet de pointe des sommets du triangle, où le champ électrique y est plus intense. Ce détail n'apparaît pas dans d'autres modes de fabrication des mousses à partir d'un même précurseur PU. Par exemple, dans les mousses INCO où le nickel est entièrement déposé en une seule étape de CVD, ce phénomène n'est pas présent.

a) 

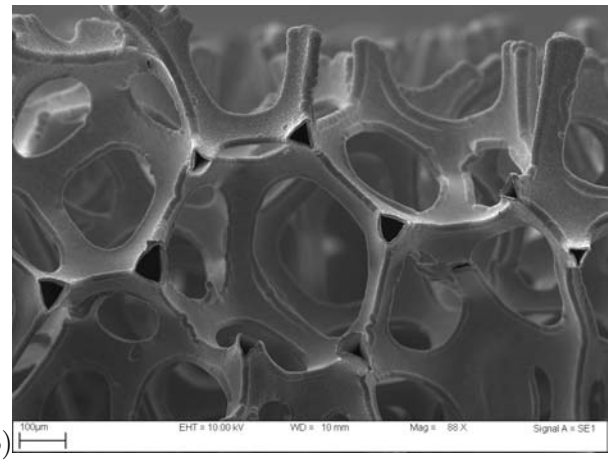
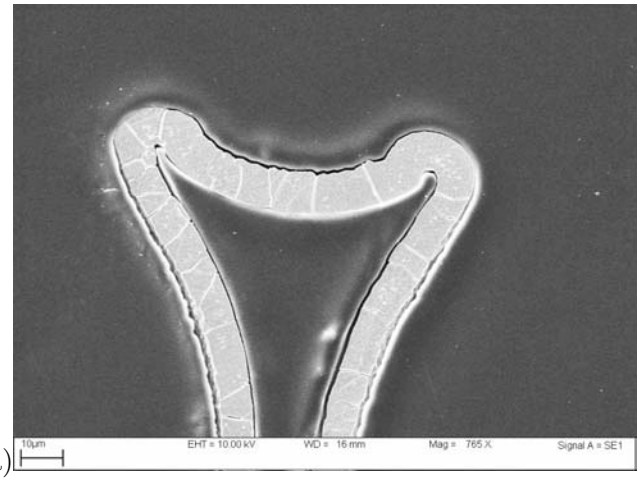
b) 


**Figure .15** : Section des brins de nickel.

A l'occasion de ce travail de recherche, aucune étude statistique n'a été réalisée sur la taille des grains. Cependant, les observations MEB de la figure .16a mènent à la conclusion que les mousses ont une structure de type bambou, *i.e.* un seul grain dans l'épaisseur. La taille des grains est donc de l'ordre de 10 $\mu$m dans l'épaisseur, alors que la figure .16b montre qu'elle est d'environ 8 $\mu$m dans le sens de la largeur.

a) 

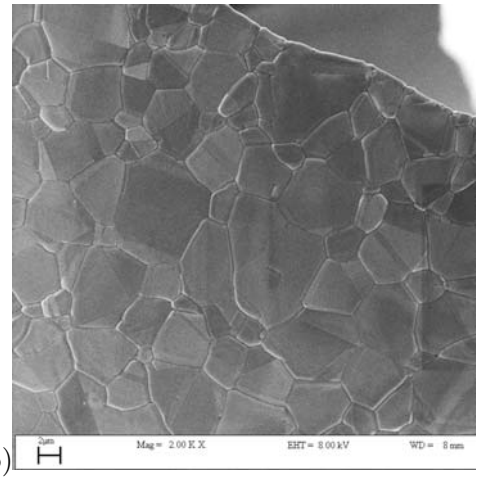
b) 


**Figure .16** : Taille de grains : a) section d'un brin (Goussery, 2004), b) intérieur d'un brin de nickel.

## 4. Application industrielle des mousses de nickel

Les mousses métalliques sont connues pour leurs bonnes propriétés spécifiques (*i*.e. propriétés ramenées à leur masse). A la différence des mousses d'aluminium à cellules fermées, destinées à l'allègement des structures et à l'absorption d'énergie lors d'un crash automobile par exemple, les mousses de nickel sont utilisées pour leur bonne conductivité électrique et leur grande capacité d'accueil (97 % de vide). Elles servent de support de l'électrode positive dans les batteries de type Ni-Cd ou Ni-MH, fréquemment employées dans le domaine de l'électronique portable (domaine d'énergie inférieure à 30 Wh).

Les générateurs électrochimiques peuvent être définis selon trois classes : les piles jetables, les accumulateurs rechargeables et les piles à combustible. Les mousses de nickel sont essentiellement utilisées dans les accumulateurs rechargeables. Les batteries rechargeables sont formées d'un assemblage de cellules cylindriques ou parallélépipédiques (voir figure .17). Chaque cellule comprend une électrode positive et négative, isolée par un séparateur en polyamide. Dans le cas des piles cylindriques, les cellules sont spiralées.

La matière active de l'électrode positive est l'hydroxyde de nickel. La mousse de nickel sert de conteneur à l'hydroxyde de nickel, siège des échanges électrochimiques dans la batterie (voir tableau .4), et joue par conséquent le double rôle de collecteur et de conducteur du courant électrique. En termes de propriétés électriques, la mousse de nickel doit offrir le minimum de résistance au passage du courant, car sa résistance électrique participe à la résistance interne de la pile et ajoute une consommation d'énergie inutile. La poudre d'hydroxyde de nickel est empâtée sur la mousse de nickel. Puis l'ensemble est calandré jusqu'à obtenir une épaisseur finale de 0,6 mm. La mousse de nickel est notamment choisie pour sa structure alvéolaire qui permet un remplissage optimal de l'hydroxyde de nickel, ce qui conduit à des gains énergétiques importants pour les accumulateurs de petites dimensions.

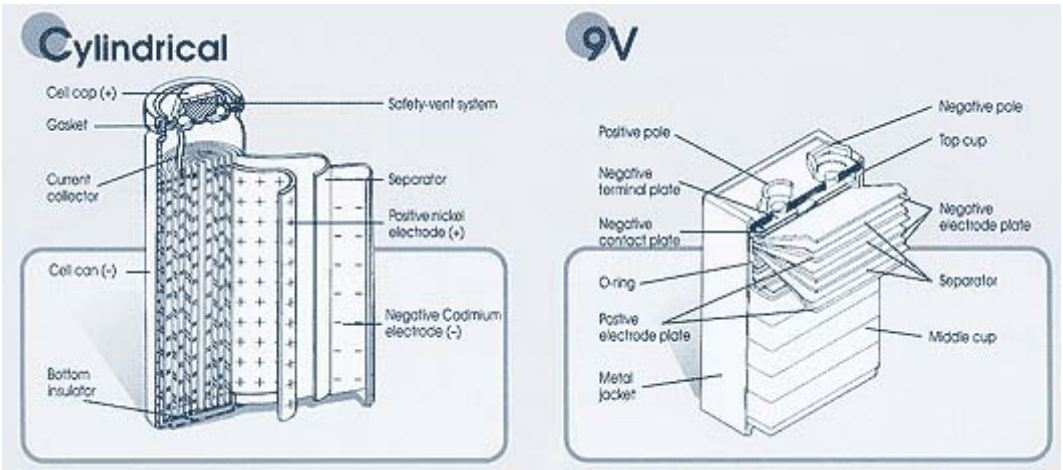



**Figure .17** : Schéma constitutif d'un batterie rechargeable Ni-Cd (source : www.ni-cd.net).

Depuis 1993 (voir figure .2), les batteries Ni-MH gagnent des parts de marché sur les accumulateurs Ni-Cd. La principale raison de cette avancée est due au gain d'énergie massique et volumique supérieur à celui des accumulateurs Ni-Cd, pouvant aller jusqu'à 25 % (voir tableau .5). Elles permettent aussi d'éliminer l'élément cadmium peu abondant et toxique. Néanmoins, les batteries au lithium ont des propriétés nettement plus appréciables que leurs homologues à base de nickel. Cependant, leur développement demeure considérablement freiné du fait de leur coût de fabrication plus élevé.

| Batterie Ni-Cd | |
|---|---|
| Electrode positive | $2Ni(OH)_2 + 2OH^- \leftrightarrows 2HNiO_2 + 2H_2O + 2e^-$ |
| Electrode négative | $Cd(OH)_2 + 2e^- \leftrightarrows Cd + 2OH^-$ |
| Batterie Ni-MH | |
| Electrode positive | $Ni(OH)_2 + OH^- \leftrightarrows HNiO_2 + H_2O + e^-$ |
| Electrode négative | $M + H_2O + e^- \leftrightarrows MH + OH^-$ |

**Tableau .4** : Réactions chimiques dans les batteries Ni-Cd et Ni-MH (Wronski, 2001).

| Type | Energie massique (Wh/kg) | Energie volumique (Wh/dm$^3$) | Puissance | Cyclabilité |
|---|---|---|---|---|
| Plomb acide | 30-40 | 70-100 | bonne | bonne |
| Cd-Ni | 60 | 120 | élevée | élevée |
| MH-Ni | 80 | 180 | bonne | bonne |
| $H_2$-Ni | 60-70 | 60-90 | bonne | très élevée |
| Li-C | 100-120 | 240 | bonne | bonne |
| Li-$Li_xMO_2$ | 120-170 | 300 | modérée | limitée |

**Tableau .5** : Qualités et limites de quelques accumulateurs rechargeables (Fauvarque, 2001).

*Remarque : aucune distinction sémantique n'est faite dans ce mémoire entre les mots pile, batterie et accumulateur.*

## 5. Objectifs de la thèse

Le but à des fins industrielles (voir section 1.) consiste à diminuer la masse de nickel mise en jeu dans l'élaboration des mousses métalliques, tout en gardant des performances électriques et mécaniques satisfaisantes. Pour ce faire, une connaissance approfondie de la relation entre la structure (*i.e.* l'architecture) de la mousse et ses propriétés, ainsi qu'une prédiction du comportement mécanique des mousses s'avèrent nécessaires.

L'objectif scientifique de cette thèse est donc double. Il s'agit :

1. d'étudier les mécanismes locaux de déformation et de rupture ;
2. de modéliser la déformation et la rupture des mousses.

Pour atteindre ces objectifs, une large gamme de techniques expérimentales a été mise en œuvre en tenant compte de la structure particulière des mousses. Les moyens d'observation et les méthodes de mesure de la déformation utilisés ici, permettent d'obtenir des informations bidimensionnelles mais aussi tridimensionnelles sur les mousses. Ces outils expérimentaux sont au nombre de quatre :

- tomographie aux rayons X ;
- MEB ;
- essais mécaniques suivis par extensométrie "traditionnelle" (capteurs mécaniques) ;
- essais photomécaniques.

Le deuxième objectif de cette thèse revient à prédire la déformation et la rupture des mousses. La modélisation proposée doit tenir compte de la réponse globale du matériau. Ce formalisme doit de plus rester suffisamment simple, et intégrer le maximum d'informations locales déduites des observations des mécanismes de déformation et de rupture.

Deux types de modélisation de la structure cellulaire sont alors envisagés :

- une approche discrète à partir d'un réseau de poutres ;
- une approche phénoménologique à partir d'un modèle continu de plasticité pour un milieu poreux.

Le réseau de poutres peut être déduit de la structure réelle de la mousse (voir chapitre I), ou d'une structure simplifiée de manière à retranscrire les mêmes mécanismes de déformation (voir chapitre IV).

## 6. Plan de la thèse

Ce travail de recherche s'articule en trois parties. Chaque partie est divisée en deux chapitres. Le cheminement entre ces parties s'effectue de manière linéaire par rapport à l'échelle d'observation, depuis la structure cellulaire jusqu'aux déformations macroscopiques.

La première partie est consacrée à l'étude des mécanismes de déformation et de ruine à l'échelle des cellules individuelles, mais aussi à la structure cellulaire de la mousse. A cette occasion, deux techniques expérimentales ont été mises en œuvre : la tomographie aux rayons X et le MEB. Le premier chapitre présente les résultats d'essais de traction/compression in-situ, réalisés au synchrotron de Grenoble. L'objectif de ces essais, effectués sous tomographie aux rayons X, consiste à observer, dans tout le volume de l'échantillon, les mécanismes de déformation et d'endommagement des mousses. Dans ce premier chapitre, on s'intéresse également à la morphologie initiale de la mousse. Cette étude permet d'identifier la cellule représentative de notre échantillon, et aussi de connaître l'anisotropie géométrique des cellules. Les outils d'analyse d'images tridimensionnelles employés sont présentés en détail ; ils ont été développés jusqu'à la représentation de la mousse par son réseau "réel" de poutres. Dans le deuxième chapitre, les essais de traction in-situ sous MEB sont rapportés. Ces expériences permettent d'étudier, à une résolution plus fine – à l'échelle du grain –, les mécanismes d'endommagement.

La deuxième partie est consacrée à la réponse uniaxiale des mousses en traction. Un modèle analytique simple, fondé sur la flexion élastoplastique des brins, est proposé en vue de simuler le comportement mécanique des mousses. Le premier chapitre présente les lois d'évolution expérimentales des constantes mécaniques. Ces lois justifient l'utilisation du modèle analytique choisi, et servent de base expérimentale au modèle. Le modèle analytique, qui fait l'objet du deuxième chapitre, permet d'obtenir la réponse uniaxiale des mousses à cellules ouvertes en fonction de leur densité relative et du comportement élastoplastique du nickel. Le modèle est alors étendu aux mousses, constituées de brins à deux phases, pour ensuite être appliqué au comportement des mousses oxydées. Dans cette deuxième partie, les travaux entrepris se limitent à la réponse uniaxiale des mousses en traction. Le comportement multiaxial fait l'objet de la troisième partie.

La troisième partie considère la mousse comme un milieu continu. L'axe de recherche s'emploie alors à modéliser la mousse par le biais d'un milieu homogène équivalent continu. Cette modélisation s'appuie sur des essais d'extensométrie traditionnelle et sur des expériences photomécaniques. La base expérimentale est présentée dans le premier chapitre de cette partie. Ces essais mettent en évidence des hétérogénéités de déformation sur des éprouvettes lisses, ainsi que des effets d'échelle dans le comportement de la mousse, sur des éprouvettes trouées. Les effets d'échelle détaillés dans cette partie sont différents de ceux généralement étudiés dans la littérature (Andrews et Gibson, 2001; Fleck et al., 2001; Onck et Bastawros, 2000). La modification de comportement engendrée par l'évolution du rapport entre le diamètre d'un

trou “macroscopique” et la largeur de l’éprouvette n’est pas considéré ici. Seule l’influence de la dimension d’un trou “macroscopique” dans un milieu poreux infini est traitée dans cette partie. Dans la mesure où la modélisation classique couramment employée s’avère incapable de rendre compte de ces effets d’échelle, une extension du modèle est proposée.

Cette thèse s’est davantage focalisée sur l’analyse du comportement en traction des mousses de nickel, plutôt que sur celui en compression. Ce choix s’explique par le comportement ductile des mousses de nickel pendant un essai de traction – différent du comportement souvent fragile des mousses d’aluminium à cellules fermées (Blazy, 2003) –, et par les spécifications clients de la société NiTECH. En effet, lors de la phase d’empâtage du procédé de fabrication des batteries, les mousses de nickel sont sollicitées en traction. Les fabricants de piles imposent donc à la société NiTECH un allongement et une contrainte à rupture minimum lors d’une sollicitation en traction. La mousse doit être suffisamment ductile en traction pour ne pas se déchirer au cours de la phase d’empâtage. De plus, si des brins de la mousse se déchirent, la batterie perd alors en conductivité électrique.

Les propriétés électriques n’ont pas été abordées ici. Cependant, comme l’a montré Badiche dans (Badiche et al., 1999), les propriétés électriques des mousses sont modélisables par un réseau de brins, où chaque brin possède sa résistance propre. Il est alors possible de déduire les propriétés électriques des mousses à partir de la connaissance exacte de sa structure. Ce travail ne fait pas l’objet de cette thèse étant entendu que seule l’étude des propriétés mécaniques est considérée.

## Partie A

# CARACTERISATION STRUCTURALE DES MOUSSES DE NICKEL A CELLULES OUVERTES

Cette première partie s'ouvre sur une caractérisation structurale approfondie des mousses de nickel à cellules ouvertes. Le but revient ici à répondre aux deux interrogations suivantes :

- Quelle est la cellule unitaire caractéristique de la morphologie de la mousse ?
- Quels sont les mécanismes de déformation et d'endommagement d'une mousse ?

Les mousses métalliques sont des matériaux tridimensionnels complexes et à ce jour, peu d'informations sur leur géométrie ont été rassemblées. Ce manque de documents sur la structure réelle des mousses peut s'expliquer par l'impossibilité de déterminer la plupart des paramètres morphologiques à l'aide d'analyses bidimensionnelles. Les outils 2D possèdent en effet une grande résolution latérale mais une trop faible profondeur de champ dans la troisième dimension. De plus, l'analyse quantitative bidimensionnelle peut être à l'origine d'erreurs. Par exemple, en étudiant la porosité d'une éponge, Müller et al. (Müller et al., 2002) ont trouvé que l'analyse d'images bidimensionnelles surestimait le diamètre moyen des pores de 6 %. Des outils spécifiques doivent donc être mis en œuvre pour répondre aux exigences de ces matériaux poreux.

Une méthode bien adaptée à ce type de matériau est la microtomographie aux rayons X. Cette technique présente l'avantage d'être non destructive, d'autant qu'aucune préparation de la surface de l'échantillon, qui peut s'avérer délicate dans le cas des mousses, n'est nécessaire.

Des essais sur un tomographe industriel à la Katholieke Universiteit de Leuven (KUL) ont donc été réalisés. Toutefois, compte tenu de la résolution visée (10 $\mu$m) et de l'absorption importante des rayons X par le nickel, aucune image de bonne qualité n'a été obtenue. Par conséquent, un projet a été mis en œuvre en collaboration avec l'INSA de Lyon et le GPM2 de Grenoble, et accepté sous le nom ME-467 auprès de l'European Synchrotron Radiation Facility (ESRF) de Grenoble. La campagne d'essais, programmée en octobre 2002, a duré 4 jours à temps plein (12 "postes" de 8 heures). Tous les essais et les résultats présentés dans le chapitre I sont issus de cette phase.

Cette première partie est divisée en deux volets. Le premier, rédigé en anglais, a été soumis sous forme d'article plus synthétique au journal *Philosophical Magazine*. Ce chapitre regroupe les principaux résultats obtenus à partir des essais de microtomographie aux rayons X. Des compléments à cette étude, qui sont ajoutés dans le deuxième chapitre, concernent essentiellement des observations structurales, obtenues sous MEB.

# Chapitre I

# Etude morphologique et observation des mécanismes de déformation des mousses

## Sommaire


**I.1 Introduction . . . . . 7**
**I.2 Méthode expérimentale . . . . . 8**
I.2.1 Procédé de fabrication des mousses . . . . . 8
I.2.2 Méthodologie des essais sous microtomographie aux rayons X . . . . . 8
I.2.3 Essais mécaniques in-situ . . . . . 10
**I.3 Analyse d'images tridimensionnelles . . . . . 11**
I.3.1 Méthode de segmentation tridimensionnelle des images . . . . . 11
I.3.2 Squelette et graphe tridimensionnels de la mousse . . . . . 11
**I.4 Résultats . . . . . 13**
I.4.1 Morphologie initiale des cellules . . . . . 13
I.4.2 Essai de traction in-situ suivant la direction RD . . . . . 20
I.4.3 Essai de traction in-situ suivant la direction TD . . . . . 23
I.4.4 Essai de compression in-situ suivant la direction ND . . . . . 26
**I.5 Discussion . . . . . 29**
I.5.1 Formes typiques des cellules : comparaison avec des bulles de savon . . . . . 29
I.5.2 Anisotropie géométrique et mécanique . . . . . 33
I.5.3 Evolution de l'orientation des cellules . . . . . 35
I.5.4 Endommagement et rupture des mousses . . . . . 41
**I.6 Conclusions et perspectives . . . . . 44**

# 3D quantitative image analysis of open–cell nickel foams under tension and compression loading using X–ray microtomography

T. Dillard [a], F. N'Guyen [a], S. Forest [a,*], Y. Bienvenu [a], J.–D. Bartout [a], M. Croset [b], L. Salvo [c], R. Dendievel [c], E. Maire [d],

[a] *Ecole des Mines de Paris / CNRS, Centre des Matériaux / UMR 7633, BP 87, 91003 Evry, FRANCE*

[b] *Technologies Conseil, 48 rue du Moulin, 91120 Palaiseau, FRANCE*

[c] *INP de Grenoble / CNRS, GPM2 / UMR 5010, Domaine Universitaire, BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères, FRANCE*

[d] *INSA de Lyon / CNRS, GEMPPM / UMR 5510, 20 Av. A. Einstein, 69621 Villeurbanne, FRANCE*

**Abstract**

Deformation behaviour and cracking of an open–cell nickel foam were analysed using X–ray microtomography at the ESRF in Grenoble, France. In–situ tensile and compression tests were performed at a resolution of 2 and 10 $\mu$m. The initial morphology of the foam is studied in details using 3D image analysis. Parameters like cell volume and strut length distributions, number of faces per cell, number of nodes per face and the shape of the most representative cells are determined. The cells are shown to be non–spherical due to the initial geometrical anisotropy of the polyurethane foam template and to the load applied to the nickel foam during its processing. This geometrical anisotropy is related to the observed anisotropy of elastic properties of the material, using a simple beam model. In tension, bending, stretching and alignment of struts are observed. A tensile test in the longitudinal direction is shown to reinforce the priviledged orientations of the cells. In contrast, a tensile test in the transverse direction leads to a more isotropic distribution of the cells. These features are illustrated by pole figures of the three axes of equivalent ellipsoids for all cells at different strain levels. Compression test is associated with strain localization phenomena due to the buckling of struts in a weaker region of the foam. Finally, the study of open–cell nickel foam failure shows that cracks arise at nodes during tensile tests and that the damaged zone is about five cells wide. Free edge effects on crack initiation are also evidenced.

*Key words:* X-ray tomography, image analysis, nickel foams, mechanical properties, fracture

## I.1 Introduction

Open-cell nickel foams are widely used for electrodes in battery applications. They play the role of container for the active material of the anode and collector of electric current. A precise knowledge of the morphology of cells is a key issue for optimizing such properties. During the processing of the battery component, the foams are subjected to severe mechanical loading conditions. This requires outstanding mechanical properties of the foams, in tension and compression. There is a strong endeavour to relate these mechanical properties to the explicit morphology of the cells. The cell morphology of open-cell nickel foams is the result of two contributions : the cell morphology of the initial polymer foam template and its evolution during the manufacturing process.

Recent observations, using computed X-ray tomography, prove that this technique is suitable for the investigation of the 3D structure and deformation of foams (Bart-Smith et al., 1998; Benouali et Froyen, 2001; Leitlmeier et Flankl, 2001; Maire et al., 2001; Maire et al., 2003). However, systematic statistical analyses of the morphology of cells in open-cell metal foams remain scarce, this is especially true for its evolution during straining (Elliott et al., 2002; Nieh et al., 1998; Nieh et al., 2000). The present work reports the analysis of in-situ tensile and compression tests performed on open-cell nickel foams at the ESRF in Grenoble. The aim of this study is to provide quantitative information on the morphology of open-cell nickel foams, regarding the shape and size of most representative cells and the corresponding statistics. The evolution of these characteristics during tension and compression loading is described in details. The attention is focused on the anisotropy of the observed cells and its evolution during straining. Another issue is to relate this aspect ratio to the observed anisotropic mechanical properties of the considered foam. Finally, X-ray microtomography also is a well-suited tool to explore the damage and failure mechanisms arising in the last deformation stages.

For that purpose, 3D image analysis procedures are necessary, for instance, to close and segment the cells. A simple threshold as used for closed cells is not possible (Elmoutaouakkil et al., 2001; Helfen et al., 2001; Jasiunienë et al., 2001; Olurin et al., 2002). A systematic 3D segmentation method for open-cell foams is presented in section II.1 (Dillard et al., 2003). This method and further image analysis tools, necessary to extract morphometric parameters like number of faces per cell, cell size and strut length distributions, are briefly recalled in section I.3.

The NiTECH nickel foam studied in this first chapter is MN 110-050-16. Its relative density, defined as the ratio of the density of the cellular material to that of pure nickel, is :

$$\rho^* = \frac{\rho_{foam}}{\rho_{Ni}} = 0.035, \text{ with } \rho_{Ni} = 8908 \text{ kg.m}^{-3}. \tag{I.1}$$

The description of the specific processing of the considered nickel foam and the presentation of the X-ray microtomography and mechanical testing procedures are given in section I.2. Section I.3 deals with the image analysis techniques used to derive the skeleton and associated graph of the observed samples. The results presented in section I.4 provide an accurate statistical description of the initial cell morphology of the investigated samples and its evolution during two tensile and one compression tests. In the discussion of section I.5, the typical cell shapes found are compared to previous results from the literature. The discussion investigates also the links between the observed geometrical anisotropy of the cells and the elastic anisotropy found for this material. The evolution of the aspect ratio during tensile loading is discussed in subsection I.5.3. The last subsection concentrates on the damage and fracture mechanisms at work in the nickel foam.

## I.2 Experimental methods

### I.2.1 Material processing

To produce stochastic open-cell metal foams, three processing routes are possible (Wadley, 2002) :

- liquid, via casting into a mold around a pattern which will be dissolved or destroyed ;
- solid, via coating a polymer template with metal powder ;
- vapor phase, via chemical or physical vapor deposition on a polymer template.

All these manufacturing methods start from an open-cell polymer foam template. The foam process, developed by the firm NiTECH (Badiche et al., 2000), uses physical vapor deposition. It can be divided into five main steps. Firstly, a polyurethane foam with the same thickness and porosity as the final product is selected as the foam template. This polymer foam is 1.6 mm thick and comes in coils of 1.2 m width. Cathodic magnetron nickel sputtering is then used to cover the foam template with a thin layer of nickel. The 0.1 $\mu$m thickness of this nickel deposit is enough to make the foam electrically conductive. An electroplating technique is then used to increase the nickel amount of the deposited layer until a thickness of 10 $\mu$m. The polymer template is burnt off at 600°C and a final annealing treatment is carried out to improve the ductility of the foam. Finally, nickel foams are slit, packaged and sold in the form of coils or flat sheets.
In this work, the coiling direction of the process is called RD. The transverse and normal directions are respectively denoted TD and ND.

A tensile force along the coiling direction RD and also some bending is thus applied to the foam during the process. Moreover, others aspects of the material processing influence directly the cell morphology of the foam and its mechanical behaviour. For instance, struts are hollow, due to the burn out of the polymer foam template. A thickness gradient of the nickel layer in the foam is also introduced by the electroplating technique. The thickness $t_e$ of the nickel layer deposited at the surface of the foam is greater than the thickness $t_i$ in the mid-section. The Thickness Deposit Ratio (TDR) is defined as follows :

$$TDR = \frac{t_e}{t_i} \tag{I.2}$$

The value of this TDR, determined by 2D image analysis on a few cm² of foam (see section II.2), is found to be equal to 1.5. The important role of this ratio on deformation during compressive test will be discussed in section I.4.4.

### I.2.2 X-ray microtomography procedure

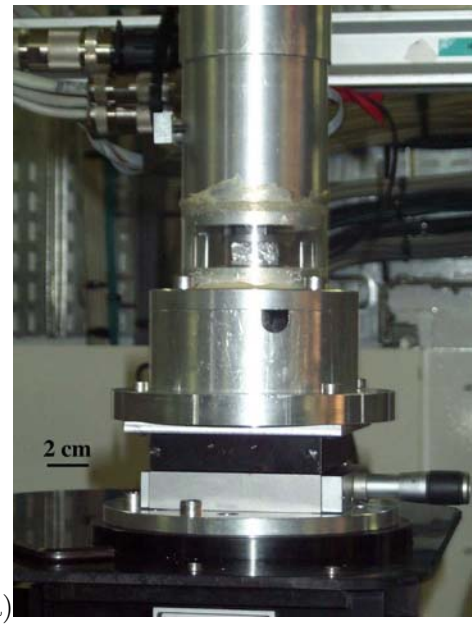
High resolution tomographic experiments have been performed using a synchrotron X-ray source on beam line ID19 at the European Synchrotron Radiation Facility (ESRF) in Grenoble. The beam line ID19 (see Appendix A) delivers a very high spatial coherence beam, due to the large distance between the source and the working hutch (150 meters). This parallel X-ray beam produces high quality images. The white beam is restricted by slits and monochromated by a set of two parallel silicon single crystals to reduce beam hardening artifacts in the reconstructed images. Indeed, the softer X-ray are, the more attenuated they are in the sample. X-ray selection is therefore necessary.

The sample is fixed on a rotation stage between the X-ray source and the detection unit that recorded the transmitted X-ray. A fluorescent screen, coupled with a low noise 1024x1024 pixels C.C.D. camera (Fast REadout LOw Noise), is used to detect the projections of the parallel beam. Finally, the resulting images of these projections, which are function of the linear attenuation coefficient $\mu$, are retrieved in grey-level tone. The higher the atomic number $Z$ and the material density $\rho$ for a given photon energy

$E$, the higher the linear attenuation coefficient.
Below 200 keV, the relationship (Attix et Roesch, 1968) between these parameters is :

$$\mu \propto \rho \quad \frac{Z^4}{E^3} \tag{I.3}$$

A tensile/compression machine has been added to the experimental set-up to perform in-situ mechanical tests (see section I.2.3). The whole tensile/compression machine is fixed on the ESRF precise translation–rotation stage (see figure I.1a). Once the sample is placed on the tensile/compression machine, a 2D radiography is acquired. Then, the sample (more precisely the whole machine) is progressively rotated under the beam from 0 to 180° to provide a set of 900 radiographs. These radiographs are used by a reconstruction software to give a 3D numerical image of the studied material. A complete scan consists in 900 radiographs and about 100 reference images. For reference images, the sample is moved out of the detection field. These images of the beam are taken for various angular positions and are useful for flat-field correction. Intensity inhomogeneities and variations of the X-ray beam can be eliminated by substraction of the reference images. The high photon flux delivered by the ESRF allows to reduce the exposure time to 1 second per radiography. A complete scan lasts approximately fifteen minutes.

a) 

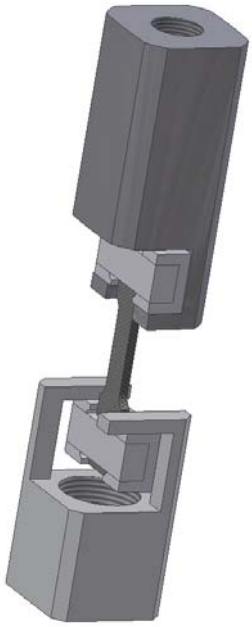
b) 

**Figure I.1** : Apparatus used in X-ray microtomography experiments : a) tension/compression machine (INSA Lyon), b) specific device for tensile tests.

The beam energy is set to 30 keV and two resolutions (2 and 10 $\mu$m) have been chosen according to the strut thickness and the mean cell diameter of the studied material. Indeed, the 10 $\mu$m resolution gives statistical data at the cell scale, whereas the 2 $\mu$m resolution provides detailed observations, on damage for instance, at the strut scale. This choice of the resolution dictates the possible sample width. For example, the largest dimension of the sample must be contained in 10.24 mm for a 10 $\mu$m resolution, due to the limited number of pixels of the camera (1024). As a result, all the material, illuminated by the beam, is recorded at each rotation. 3D reconstruction is thus made easier. In the case where the sample is larger than the field of view, the projections are truncated and the reconstruction problem is known as “Local Tomography” (Baruchel et al., 2000, p.53) (Berenstein, 2001; Faridani et al., 2001).

### I.2.3 In-situ mechanical testing

A tensile/compression machine has been especially designed to allow the observation of deformation and damage by X-ray microtomography (see figure I.1a). To let the X-ray beam go through the machine and to transmit the load between the upper mobile grip and the lower fixed grip, a transparent polymer tube is used in the central part of the machine (Maire et al., 2001). This tube has been carefully polished and gives negligible and constant attenuation on every 2D radiographs. A 2 kN cell load is set on the lower grip. An extensometer is fixed on the upper grip. The upper grip moves thanks to an endless screw whereas the lower grip is fixed on the bottom part of the machine. Force and displacement are recorded on a computer and monitored during the test. Tests are displacement controlled.

A specific device has been developed for tensile tests (see figure I.1b). Drawings are given in Appendix B. First of all, the sample is glued between plates. The distance between the male and female parts in the middle of the plates corresponds to the thickness of the foam. The plates are made of aluminium (Dural) to make their machining easier and to reduce their weight. The advantage of these plates consists in having a perfectly plane and large contact area between the plate and the grip, but also, in aligning automatically the sample with respect to the loading axis.

The specific design of the lower grip comes from the conception of the tensile/compression machine. Indeed, the sample cannot be attached, at the same time, on the upper and lower grips due to the polymer tube. So, the sample is first placed on the upper grip inside the polymer tube. Then, the top part of the machine (with the sample inside) is fitted on its lower part with an angle of 90°. The sample is thus placed in the middle of the lower grip. The angle between the upper and the lower part of the machine is then reduced to zero. And the upper grip is moved until the lower plate reaches the lower grip, that is until a force is detected. Once the sample is set in the machine, a first scan is acquired to characterize the initial state. Then, the tensile test begins. The sample is slightly loaded and interrupted for scanning the current state of the foam.

Compression tests are easier to implement than tensile ones. Indeed, only two plateforms with parallel faces are needed to compress a piece of foam. The sample is placed in the middle of the lower plateform and the top part of the machine is fitted on its lower part. The upper grip is moving down until a force is detected. Then, the compression test begins. Test is interrupted for scanning the current state of the foam. For each tensile and compression test, five scans are performed at several strain level.

One can also note that a specific device has been developed to handle carefully the specimen with plates. In order not to twist the 1.2 mm wide sample because of the weight of the plates, the magnetic properties of nickel has been used. An electromagnet has been designed and placed on the whole upper surface of the foam. A metal plate is placed behind to better close the magnetic field. Thus, the specimen can be raised and moved without any risk.

Tensile specimens have a dogbone shape to minimize the studied area (see figure I.2). Their size is 15 mm in height, 5 mm in width and 1.68 mm in thickness for the 10 $\mu$m resolution, and 4.7 mm in height, 1.2 mm in width, and 1.68 mm in thickness respectively for the 2 $\mu$m resolution. Due to their small width, specimen have been cut by electro discharge machining wire cutting to limit strut crushing. For compression specimens, a more simple shape is adopted. The sample is rectangular 6.8 mm long, 4.3 mm wide and 1.68 mm thick for the 10 $\mu$m resolution. According to the dimensions of tensile specimen, two scans are necessary to follow the whole area of interest in height at each state, whereas only one scan is needed in compression (1.68 mm high).

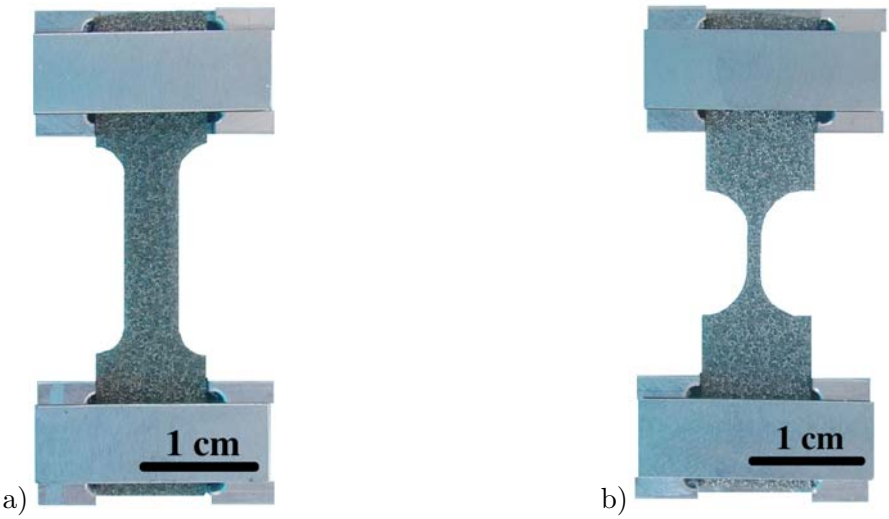



**Figure I.2** : Specimens for in-situ tensile tests : a) sample for 10 $\mu$m resolution, b) sample for 2 $\mu$m resolution.

## I.3 3D image analysis

3D image analysis of open-cell foams is a complicated task because of the 3D segmentation of the cells. To compute morphometric parameters, the cells of the foam have to be isolated first. But, their separation is not easy to perform numerically. Some criteria have to be found to reconstruct the cell walls. The 3D segmentation method has been done recently in (Dillard et al., 2003) and will be discussed in details in section II.1. Only the procedure and the result of the 3D segmentation (see figure I.3) are mentioned here.

### I.3.1 3D segmentation procedure

The 3D starting volume, derived from one scan, is divided into a set of 2D grey tone slices. Due to the large difference between the linear attenuation coefficient of air and nickel, the grey-level distribution of the images appears bimodal. So, a simple threshold, which takes the lowest grey-level, is applied to generate binary images. Then, the hollow struts are filled in by straight forward morphological operations.

The 3D segmentation method is divided into three main steps. First, the distance map image of the cells (Serra, 1988) is computed and the position of the ultimate eroded sets (Lantuéjoul et Maisonneuve, 1984), called markers, is determined. The right markers are then selected by topographic conditions. Finally, the watershed (Meyer et Beucher, 1990) is contructed from these markers with the help of the distance function. The result is that open-cells have been closed and isolated in 3D. A 2D section of the foam and its segmentation result are represented respectively in figure I.3. This segmentation allows to directly find the value of some morphometric parameters. For instance, the volume of each cell can easily be determined.

However, other morphometric parameters require the knowledge of the 3D skeleton (one voxel thick) of the foam. For that purpose, the 3D resulting watershed, formed by one or two voxels thick, is made thinner.

### I.3.2 3D skeleton and graph of open-cell foams

To obtain the 3D skeleton and the graph of the structure, a methodology has been developed. The graph of open-cell foams is a node-strut representation and consists in having the node coordinates and the

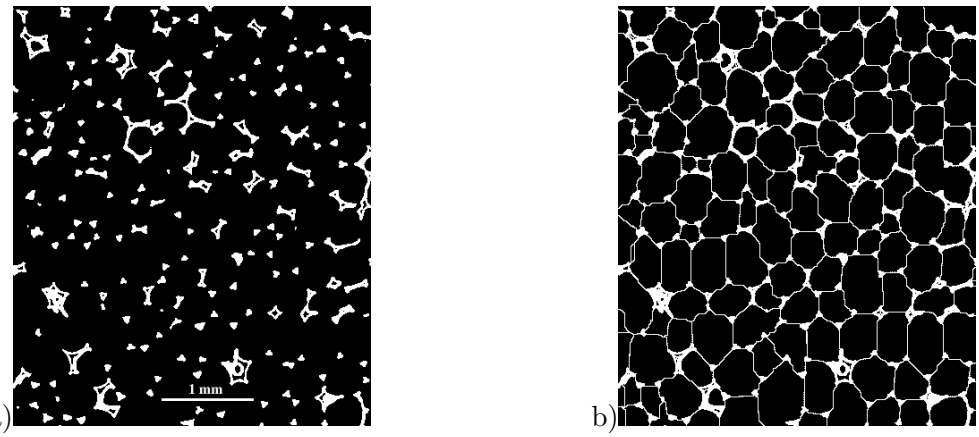



**Figure I.3** : 3D segmentation of open-cell foams : a) 2D section of the foam, b) 3D closed cells.

node connectivity list of the foam. First, a label is assigned to each closed cell of the foam. Then, the neighbourhood (3x3x3) of each voxel of the watershed is studied. The label of the most represented cell in the neighbourhood is assigned to each voxel of the watershed. The result is that no voxel belongs to the watershed. Cells are only delimited by a different label. Finally, the derivative of the labels is processed to obtain the 3D skeleton of one pixel thick.

As a result, this 3D skeleton contains the edges but also the walls of the closed cells. To retrieve the open-cell structure, the voxels of the skeleton are selected according to the Plateau's laws (Plateau, 1873). From the area minimizing principle, Plateau derived in 1873 the first laws of foam geometry. He indicated that edges are formed by three liquid films equally inclined toward one another, with mutual angles equal to 120°, and that vertices are formed by four edges equally inclined toward one another in Euclidian space. Thus, three cells should meet along edges, and four cells should meet at vertices. Voxels of the skeleton that have only two labels in their neighbourhood are considered as faces, three labels as struts and four or more labels as nodes. Only nodes and struts are kept. The resulting graph of the open-cell nickel foam structure is given in figure I.4.

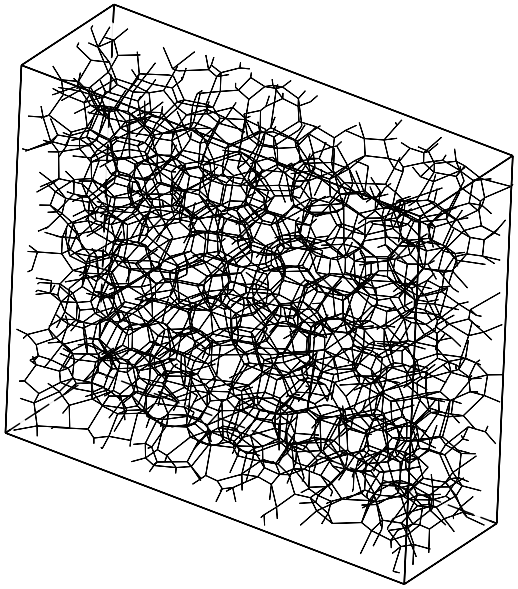


**Figure I.4** : 3D real graph of open-cell foams.

# I.4 Results

## I.4.1 Initial cell morphology

In this work, the initial state of the foam has been studied in detail to have an accurate description of its morphology. Indeed, the knowledge of foam morphology can influence the choice of the representative unit cell to model the mechanical behaviour of foams (Barma et al., 1978; Fazékas et al., 2002). As a result of this first part, precise geometrical elements for a better understanding of the mechanical behaviour and deformation mechanisms of the foam are expected.

To obtain a statistically representative result, a large initial volume is analysed. It is 4.7 mm long, 4 mm wide, and 1.68 mm thick and contains 143 cells. Incomplete cells at the boundary are excluded in the analysis.

### a) Cell volume distribution

The volume of the individual cells is the first parameter that can be reached easily once the cells have been segmented. The volume of each cell is determined by counting the voxels inside the cells. A marching cube algorithm (Lorensen et Clyne, 1987) is used to better estimate this parameter.
Figure I.5 shows the cell volume distribution.

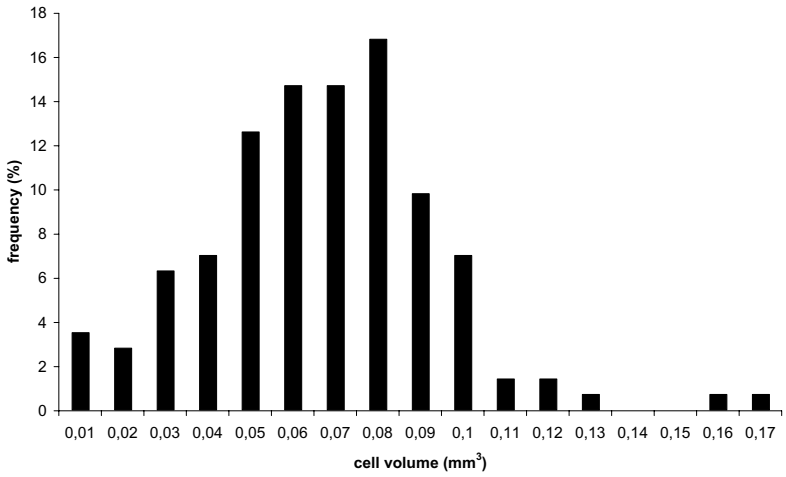



**Figure I.5** : Cell volume distribution in the initial state of nickel foams.

The distribution is monomodal, centered around 0.07 $mm^3$, with a peak at 0.08 $mm^3$. The average cell volume is 0.071 $mm^3$.

If the cells were spherical, the diameter of the mean cell would be equal to 514 $\mu$m. This value lies within the range given by the firm NiTECH, from 450 to 550 $\mu$m. These two cell diameter correspond, for spherical cells, to 0.047 and 0.087 $mm^3$.
One can note that only 58 % of the cells are ranged between these two values. The hypothesis of spherical cells will be discussed in the next sections.

### b) Node coordination

Voxels with more than four labels are considered as nodes (see section I.3.2). However, as Plateau wrote, to be in mechanical equilibrium, each junction of the foam forms a tetrahedron.

Each junction is composed by four edges with an angle of 109°28'16" ($= Arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$) between each edges. The node coordination must be four for each node. To check the validity of the 3D image analysis, the node coordination distribution of the graph of the foam is plotted in figure I.6.

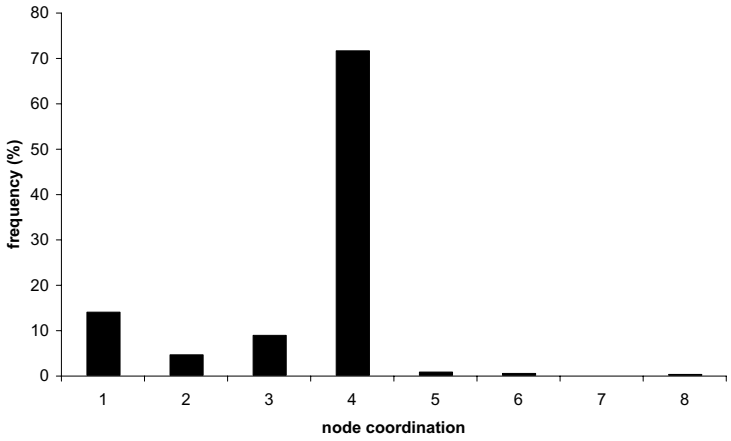



**Figure I.6** : Node coordination distribution in a nickel foam.

As expected, the node coordination distribution appears well-centered on 4 with a sharp maximum. More than 70 % of the nodes are the intersection of four struts. Another peak is detected for the value 1. This peak comes from the nodes placed at the boundary of the node-strut representation.

### c) Number of faces per cell

The volume of the cells gives just an overall idea of the cells, but nothing about their shape. To identify the most representative shape of the cell in NiTECH foam, 3D image analysis has been performed again. First of all, only the voxels of the skeleton that have two different cell labels in their neighbourhood are considered. A label is assigned to each face. Then, each in turn, faces are dilated isotropically. Nodes, that are in the neighbourhood of the dilated face, are recorded. The number of nodes corresponds to the number of sides of the face. Moreover, the edges of the faces are removed and the core of the face is dilated. The cell labels met during this morphological operation are also recorded. As a result, we have, for instance, the following information : the face labelled 1 has got 5 sides and belongs to the cell 1 and 4. So, it is easy to deduce the number of faces per cell and to find what is the shape of the most representative cell in nickel foams. First of all, the number of faces per cell are determined. The number of sides per face is tackled in the next section d) at page 16.
Figure I.7 shows the distribution of the number of faces per cell. A sharp peak is observed for the value 12. One third of the cells have 12 faces.

However, the average number of faces per cell is found to be equal to :

$$< f >= 13.02 \tag{I.4}$$

One can also note that 80 % of the values lie between 12 and 15 faces.

Moreover, the shape of the most representative cell can be extracted from these results. The four most frequent cells encountered in the open-cell nickel foams are given in table I.1. The most representative cell in NiTECH foams has got 12 faces : 2 quarilaterals, 8 pentagons and 2 hexagons.

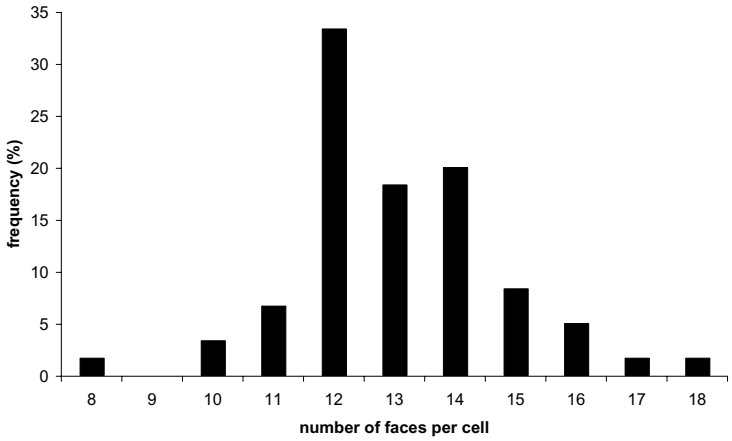


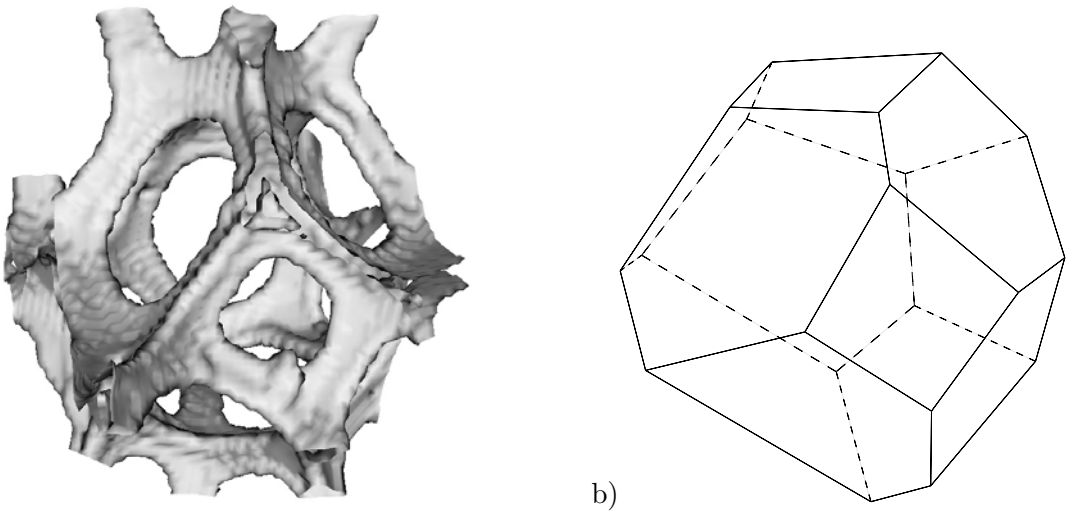

**Figure I.7** : Distribution of the number of faces per cell.

| Shape | Frequency(%) | Total number of faces | Quadrilateral face | Pentagonal face | Hexagonal face |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 12 | 2 | 8 | 2 |
| 2 | 11.5 | 12 | 0 | 12 | 0 |
| 3 | 8.3 | 14 | 2 | 8 | 4 |
| 4 | 6.6 | 13 | 3 | 6 | 4 |

**Tableau I.1** : Shape of the most frequent cells in open-cell nickel foams.

The graph representation of the most frequent cell is represented in figure I.8. This shape is present in 15 % of the foam.

The proportion of quadrilaterals and hexagons present in this cell are equal and represent 16.6 % whereas pentagons represent 66.6 %. These proportions are in good agreement with those found for the "average" cell in section d) at page 16. That is why this shape is assumed to be the ideal cell to model NiTECH foams, even if it does not pack to fill space.



a) b)

**Figure I.8** : Most frequent cell in open-cell nickel foams : a) 3D cell rendering, b) associated skeleton.

### d) Number of sides per face

The number of sides per face has been determined (see section c) at page 14). Figure I.9 shows the monomodal distribution of the number of sides per face. Most of the faces of the foam are pentagonal. Pentagons represent 57 % of the faces. Quadrilateral and hexagonal faces are found with a similar frequency. There are respectively 17.6 % and 21.6 % of faces with four and six sides in the foam. It results that 96.2 % of the faces of the foam are composed by four, five and six sides.

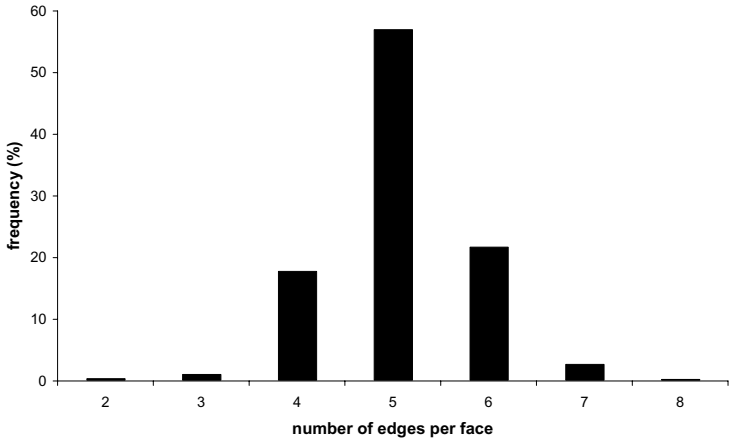



**Figure I.9** : Distribution of the number of sides per face.

The average number of sides is equal to :

$$< n >= 5.07 \tag{I.5}$$

The results of section c) (page 14) and section d) (page 16) show that most of the NiTECH cells have 12 faces and that most of the NiTECH faces are pentagonal. Moreover, edges of any cell meet at tetrahedral angles which is close to the angle of a regular pentagon. Indeed, the angle between the edges of a pentagonal dodecahedron is equal to 108°. Pentagonal dodecahedron is the regular polyhedron which is the closest to the ideal angle of $Arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. Slight modification is thus required to satisfy Plateau's condition. Such angles may become modified by curvatures of the edges. That is why this shape is well represented in foams (it is the second most frequent shape in NiTECH foam) even if pentagonal dodecahedra do not pack to fill space. As a result, pentagonal dodecahedron is often chosen as the ideal cell to describe the foams (Barma et al., 1978; Chan et Nakamura, 1969; Menges et Knipschild, 1975).

### e) Strut length distribution

Strut length is determined at the end of the 3D image analysis when the graph of the foam is established. Only spatial position of nodes and node connectivity are necessary to calculate the length of struts.
Figure I.10 shows a monomodal distribution of strut length.
Only fifty percent of the foam struts have a length ranging between 130 and 210 $\mu$m. Due to the long tail of the distribution, the mean strut length is 193 $\mu$m. However, the modal strut length is around 170 $\mu$m which is in good agreement with SEM observations (see figure .14).

One can note that these quantitative information on strut length cannot be obtained from 2D observations. Moreover, struts inside the foam are not visible. They are hidden by struts in foreground.
One should also recall that a possible curvature of the strut is not considered in the computation. Struts are considered as linear beams connecting two nodes.

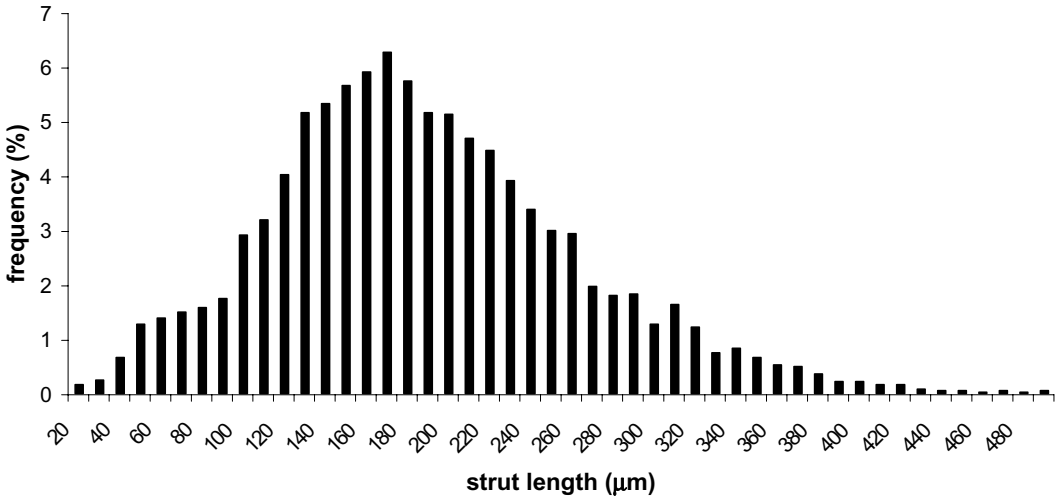



**Figure I.10** : Strut length distribution.

### f) Equivalent ellipsoid and orientation

The previous sections show clearly that cells are not spherical. Moreover, their shape should be influenced by material processing. Indeed, the foaming process of the polyurethane foam template is affected by gravity, which favours cell elongation in the direction ND. During the nickel foam process, the coiling and uncoiling force, applicated in the direction RD, can also modify the cell shape. So, in this section devoted to cell anisotropy, cells are to be replaced by equivalent ellipsoids. The dimensions of the three axes of the ellipsoids are be determined as well as their orientations to check the existence of preferential directions.

For each cell, the 3D inertia matrix is computed. The eigen values of this matrix are obtained and correspond to the three principal axes of the equivalent ellipsoid. For each cell, the three principal axes of the equivalent ellipsoid are denoted $a$, $b$, and $c$ (see figure I.11c) ; where $a$, $b$, and $c$ are respectively the smallest, the medium and the largest dimension ($a < b < c$).

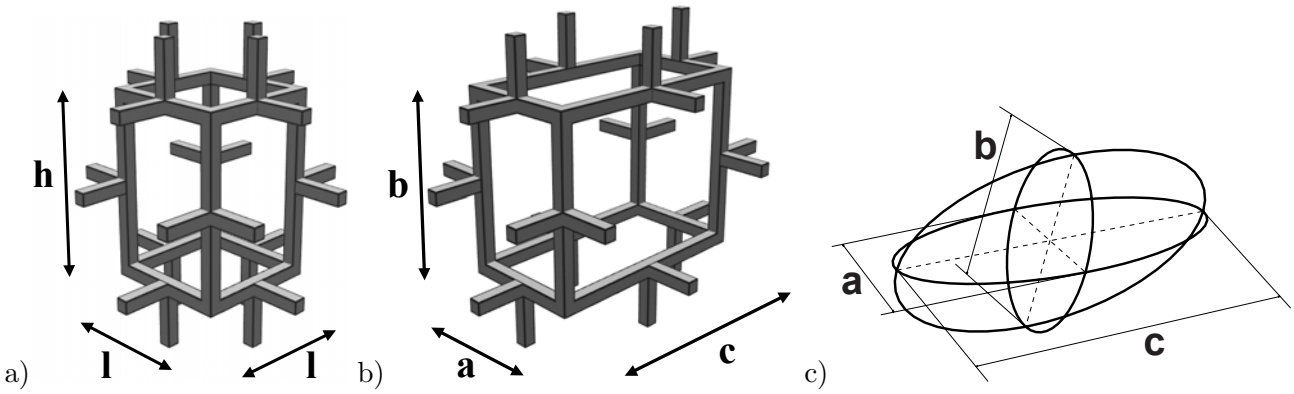



**Figure I.11** : Idealized anisotropic unit cell : a) Gibson and Ashby cell, b) orthorombic cell, c) equivalent ellipsoid.

Figure I.12 shows the three monomodal distributions of parameter $a$, $b$, and $c$ for the initial state. As expected, the three dimensions of the equivalent ellipsoid are different. It means that the cells are elongated. One can also note that the distribution of the $a$-parameter is the less scattered and that the

three distributions overlap. This overlap is more important between the distribution of the parameter $b$ and $c$. The distribution of the $c$-parameter is the most scattered. Only 63 % of the $c$-parameter values lie between 560 and 700 $\mu$m. It is quite natural to find again the same scatter as for cell volume. The average value of the three parameter $a$, $b$, and $c$ are respectively 419, 520 and 632 $\mu$m. One can note that the volume of the mean ellipsoid, defined with the three mean length of the axes $a$, $b$ and $c$, is equal to 0.072 mm$^3$. This value is close to the mean cell volume found in section a) at page 13.

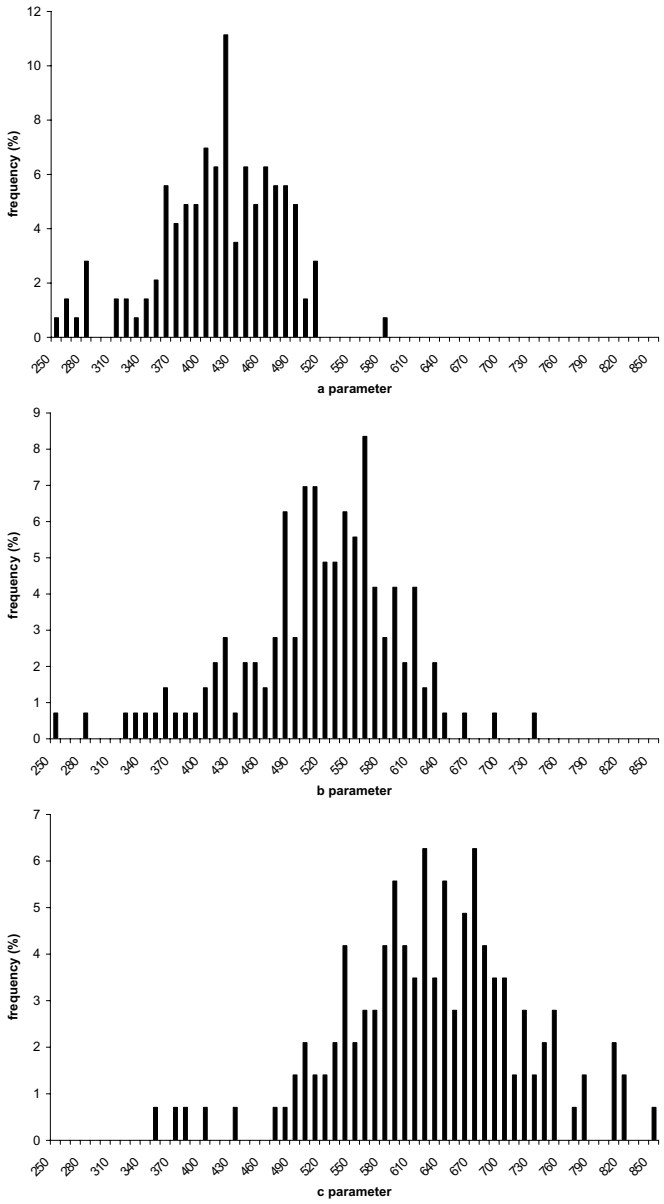



**Figure I.12** : Length distribution of the axes of the equivalent ellipsoid for cells at the initial stage ($\mu$m).

The ratios of parameter $a$, $b$, and $c$ are given in table I.2. The larger this ratio, the more elongated the cell. The maximum ratio $\frac{c}{a}$ means that the length of the cell is 1.5 time longer in the direction associated with the $c$-parameter than in that associated with the $a$-parameter. One can note that the ratios $\frac{c}{b}$ and $\frac{b}{a}$ are almost equal.

| $\frac{c}{a}$ | $\frac{c}{b}$ | $\frac{b}{a}$ |
|---|---|---|
| 1.51 ± 0.17 | 1.21 ± 0.12 | 1.24 ± 0.13 |

**Tableau I.2** : Ratios between the mean length of the axes of the equivalent ellipsoid in the initial state.

To complete these results, the directions associated with each parameter $a$, $b$, and $c$ have to be found. This orientation is given by the eigen vectors associated to the eigen values of the 3D inertia matrix. The stereographic projection of these vectors are represented in the (TD, RD) plane in the figure I.13. The orientation of the smallest $a$–axis of each cell, more precisely of each equivalent ellipsoid, is represented by a black dot in the (TD, RD) plane of the figure I.13a. The orientation of the $b$–axis (resp. $c$–axis) of each equivalent ellipsoid is represented by black dot in figure I.13b (resp. figure I.13c).
Figure I.13 clearly shows that the $a$–axis of the ellipsoid is almost parallel to the transverse direction TD, $b$ to the coiling direction RD and $c$ to the normal direction ND.

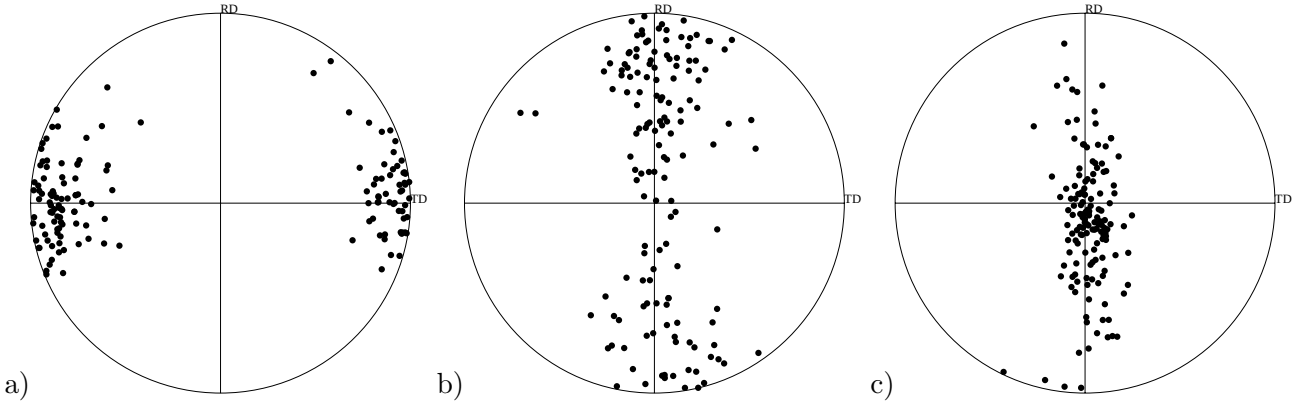



**Figure I.13** : Orientation of the axes of the equivalent ellipsoid in the (TD, RD) plane at the initial stage : a) $a$–axes, b) $b$–axes, c) $c$–axes.

The fact that the largest length (c-parameter) is oriented to the normal direction ND proves that the foaming process of the polymer foam is the most important factor involved in the morphology of the final product. Gravity and drainage of the wet polymer foam prior to its solidification dictate the cell morphology of open-cell NiTECH foams. During the manufacturing process, the force, applied to the foam in the coiling direction, may explain that the orientation of the medium dimension, the $b$-parameter, is aligned with the direction RD. However, the effect of the manufacturing process is of secondary importance. The effect of the manufacturing process is visible in the dispersion of the stereographic projections. The $b$- and $c$-projections are more scattered than the $a$-ones. Indeed, during the manufacturing process, the cells are tilted in the coiling direction. It results that the orientation of the largest $c$-axis is not aligned with the normal direction. That is why some black dots are not only concentrated in the center of the figure I.13c but scattered along the RD line. Moreover, during the manufacturing process, the initial $b$-parameter of the polyurethane foam template is increasing whereas the initial largest $c$-parameter of the polyurethane foam template is decreasing. So, for some cells, at the end of the manufacturing process, the dimension of the axis aligned with the coiling direction can be larger than that aligned with the normal direction. That is why black dots are close to the RD (resp. ND) pole in the figure I.13b (resp. figure I.13c). The dimension of the smallest $a$-axis remains the smallest dimension during all the manufacturing process. Its stereographic projection is thus less scattered.

All these results represent the initial morphology of the NiTECH nickel foams which is inherited from the polyurethane foam template foaming and peeling geometry (see section 2.1.). The North pole area of the polyurethane foam template provides isotropic cells in the plane (RD, TD) and elongated cells along the normal direction ND. The cell dimensions and orientations would have been different by considering an other area of the polyurethane foam.

### I.4.2 In-situ tensile test in direction RD

In this section, the main mechanisms of deformation during tensile tests are addressed. The evolution of the cell shape and cell orientation is discussed further in the section I.5.3. An in-situ tensile test, in the coiling direction RD, has been performed.
The experimental curve is given in figure I.14. After a linear elastic regime, open-cell nickel foams exhibit a non-linear elastoplastic regime followed by a regime with almost linear hardening.

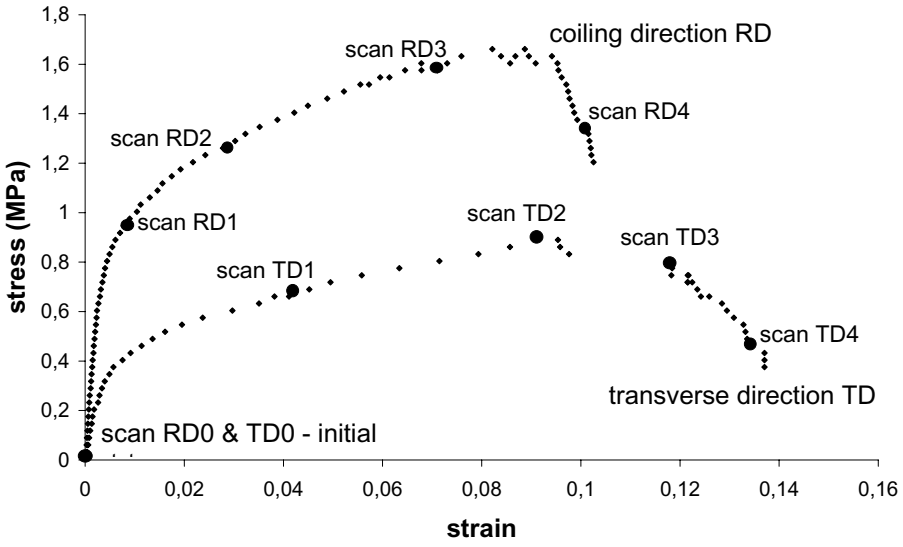



**Figure I.14** : In-situ tensile curves.

A scan has been performed in each part of the curve to better understand the deformation mechanisms. The RD0 scan represents the initial state. The RD1 scan is placed at the end of the initial linear elasticity, the RD2 scan in the plastic regime and the RD3 scan at the onset of the fracture. The RD4 scan is taken when the crack has propagated. The position of these scans is indicated by large black dots in figure I.14. The overall strain at maximum load is about 9 %.

The 3D rendering of the five scans are represented in figure I.15. The tensile direction of the test is vertical. The foam elongates in the vertical direction whereas contraction is observed in the horizontal directions. A crack initiates at the top of the specimen (RD3 scan). The crack area is marked by a dotted circle. In tension, before cracking, the cells do not undergo large deformation. No pure bending is observed. Only relative displacement of nodes and some alignment of struts in the tensile direction can be seen. These strut displacements induce bending at nodes but also, tension in the struts.

To highlight the small rotation of struts, a cell skeleton of the analysed volume has been isolated for different strain level (see figure I.16). In the last picture, the initial state (RD0 scan) and that after crack (RD4 scan) are surperimposed. The alignment of struts with the vertical direction and cell elongation are clearly shown.

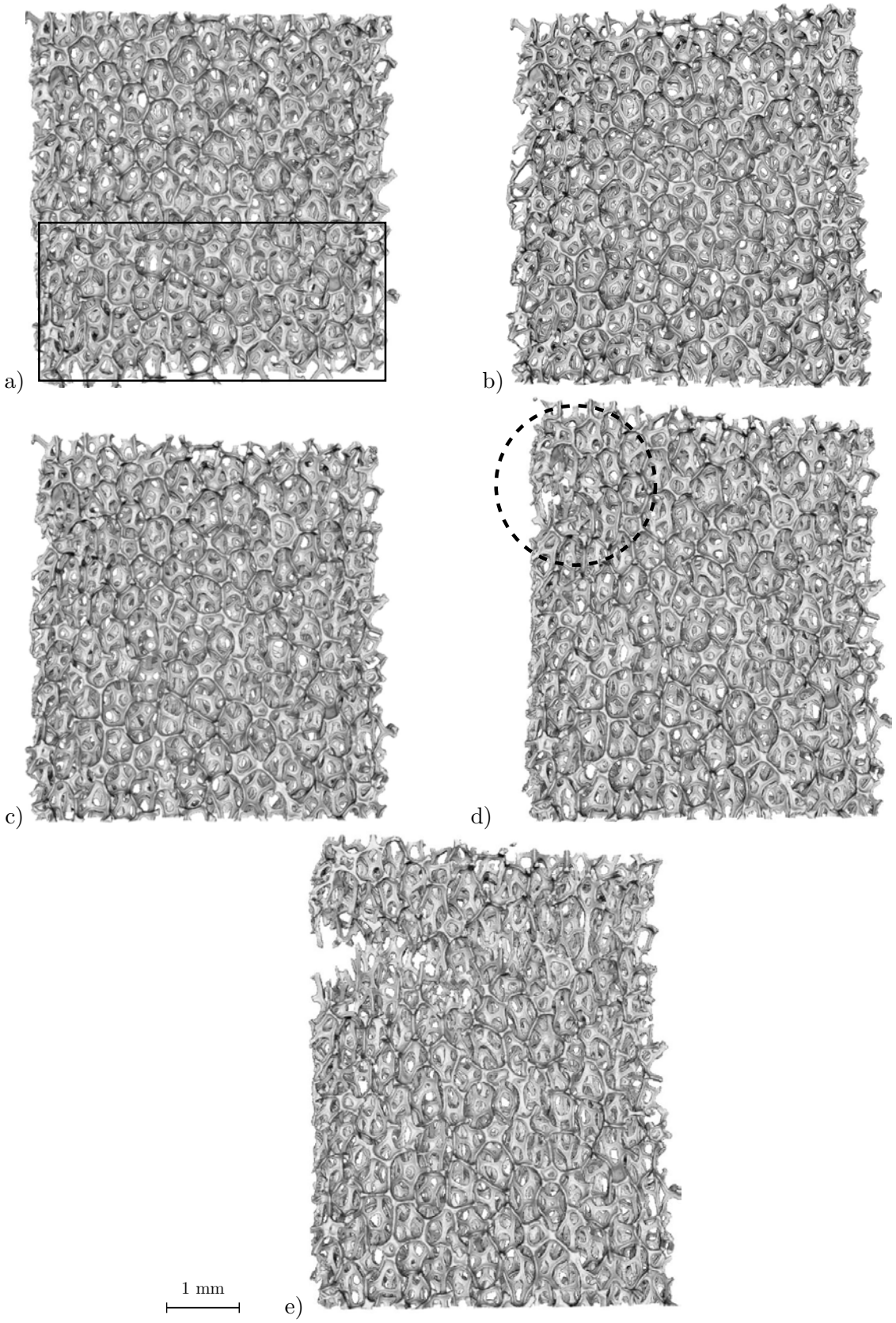



**Figure I.15** : 3D rendering of the RD scans : a) RD0 scan, b) RD1 scan, c) RD2 scan, d) RD3 scan, e) RD4 scan. The loading direction is vertical.

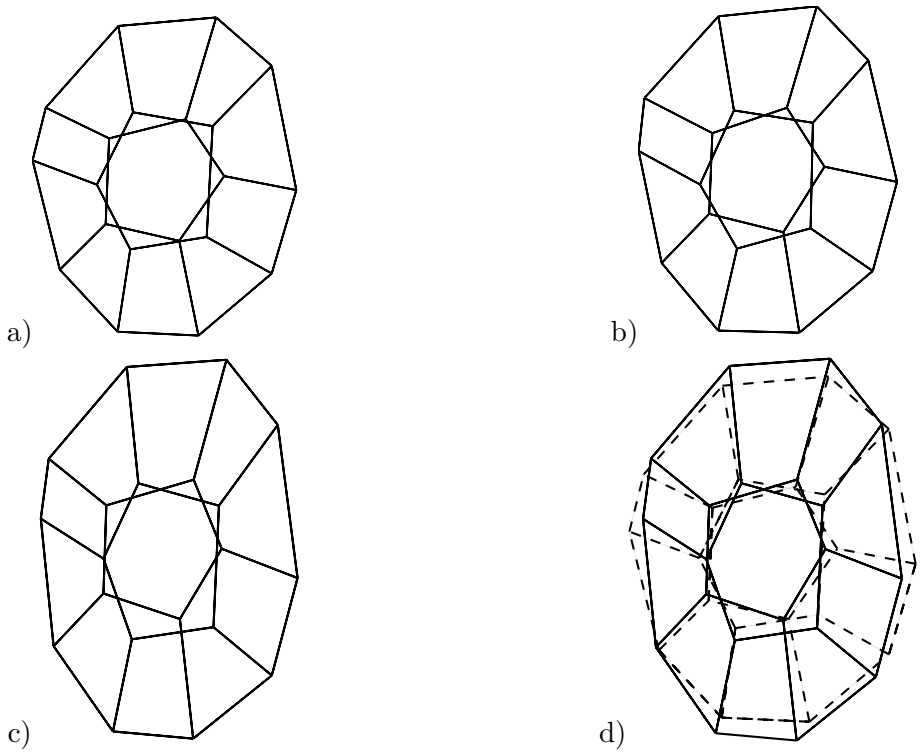



**Figure I.16** : Individual cell deformation – loading in RD direction (vertical) : a) RD0 scan, b) RD2 scan, c) RD4 scan, d) superimposition of RD0 and RD4 scans.

One can note that in-situ tensile tests using X-ray microtomography are well-suited for detecting failure initiation point during loading and also, the place where the first crack appears. The RD3 scan of the figure I.15 confirms this point. The dotted circle shows the initiation area of the crack. The net section of the sample decreases causing the stress acting on the foam to further increase. This phenomenon may be explained by the competition between strut alignment and work-hardening on the one hand, and failure on the other hand. The alignment of struts in tensile direction and hardening make the foam stiffer, whereas failure induces a decrease in elastic energy of the foam. That is why the stress increases more slowly when the crack initiates. Failure of open-cell nickel foams will be studied later in section I.5.4.

The volume of nickel foam analysed has been cut parallel to the (RD, TD) plane of the coil. Each 2D image contains the information of a slice of 10 $\mu$m thickness. The nickel surface density has been evaluated for each 2D slice and plotted as a function of the thickness (see figure I.17). Each 2D slice has been thresholded separetely because there is a huge intensity effect between surface and mid-section slices. Surface slices appear lighter than the others due to their extra nickel. The first and the last slices have been removed because only a part of the material was present : the surface of the sample was not perfectly parallel to the cut surface. That is why, the thickness plotted is smaller than the specimen thickness. Moreover, the percentage of nickel is higher than that determined by the relative density (weighing method). The average surface density is around 14 % whereas it should be 3.5 %. This huge difference must come from the choice of the resolution. The resolution is unsuitable for TDR computation (ratio between the thickness of the nickel layer deposited at the surface and that at the mid-section of the foam) because the thickness of the struts (between 8 and 13 $\mu$m, see section II.2) is similar to the resolution (10 $\mu$m).
However, the general trend of figure I.17 is significant. During tensile loading, the form of the TDR curves does not change essentially. No strain localisation band can be seen in the (RD, TD) planes.

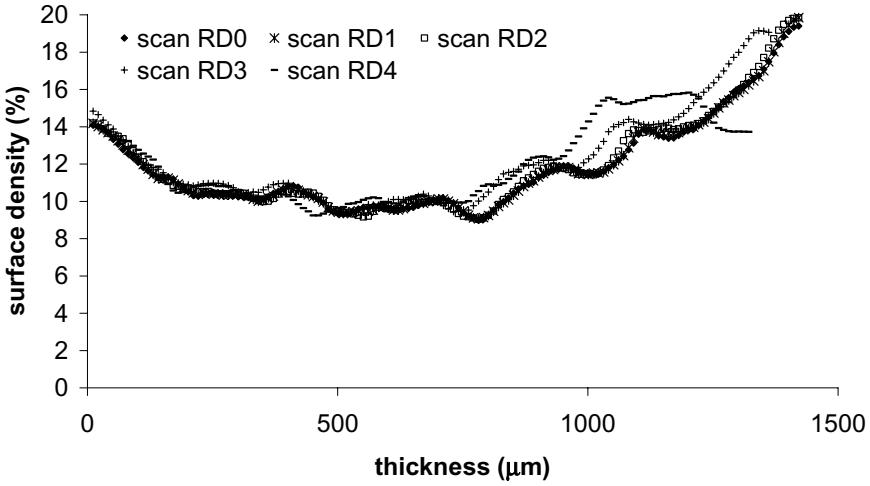



**Figure I.17** : Evolution of the Thickness Deposit Ratio (TDR) during tension along RD.

### I.4.3 In-situ tensile test in direction TD

The same analysis is carried out for a tensile test along TD. The in-situ tensile curve, during loading in the transverse direction TD, is given in figure I.14. The mechanical behaviour of open-cell nickel foams exhibits a strong anisotropy effect. Indeed, Young and plastic moduli are different and depend on the tensile direction. Failure stress during tension in direction RD (1.6 MPa) is almost twice the value found in direction TD (0.9 MPa). Elongations at failure are different too. Failure strain is around 7 % in the coiling direction and 9 % in the transverse one. The RD3 scan (see figure I.15) and TD3 scan (see figure I.18) show that some cells are broken. In other macroscopic tests with larger samples (see section III.2), failure appears later : around 9 % in the coiling direction and 15 % in the transverse direction.

Five scans have been taken during the test (see figure I.14) : one at the initial state without deformation, one in the middle of the plastic regime, one just before and one just after crack initiation, and a last one before the end of the test. 3D reconstructions of the foam at each stage are shown in figure I.18. Circles in the TD3 scan indicate the cracked zone. Two cracks initiate almost at the same time. The crack begins first at the top left side and this crack separates the foam in two parts at the end of the test. The tensile direction is vertical. One can also note the foam's lateral contraction.

To better estimate the deformation mechanisms, a zoom of a part of the foam has been also carried out. This zoom has been performed in tensile tests along the transverse direction because deformation are larger in this direction than in the coiling direction. Moreover, the zoom area, chosen in the middle of the foam, is going through by the crack. Thus, deformation is maximum in this area. This area is represented by the dotted box in the TD0 scan of figure I.18 and its 3D rendering is shown in figure I.19. The same phenomena as those explained during tensile test in the coiling direction are visible. The struts rotate around the nodes and line up along the loading direction. This rotation induces bending at the nodes and leads to fracture of junctions. Struts where displacement is noticeable, are marked with black arrows whereas fractured struts are marked with dotted arrows.

The evolution of the TDR has been studied by the same technique as that explained in section I.4.2. The volume has been cut perpendicular to the normal direction ND and the first and the last slices have been removed for the same reasons as those explained in the previous section. The form of the TDR curves does not change essentially during loading (see figure I.20). The same tendency, as that in the coiling direction, is observed. Deformation appears rather homogeneous in the (RD, TD) planes during all the test.

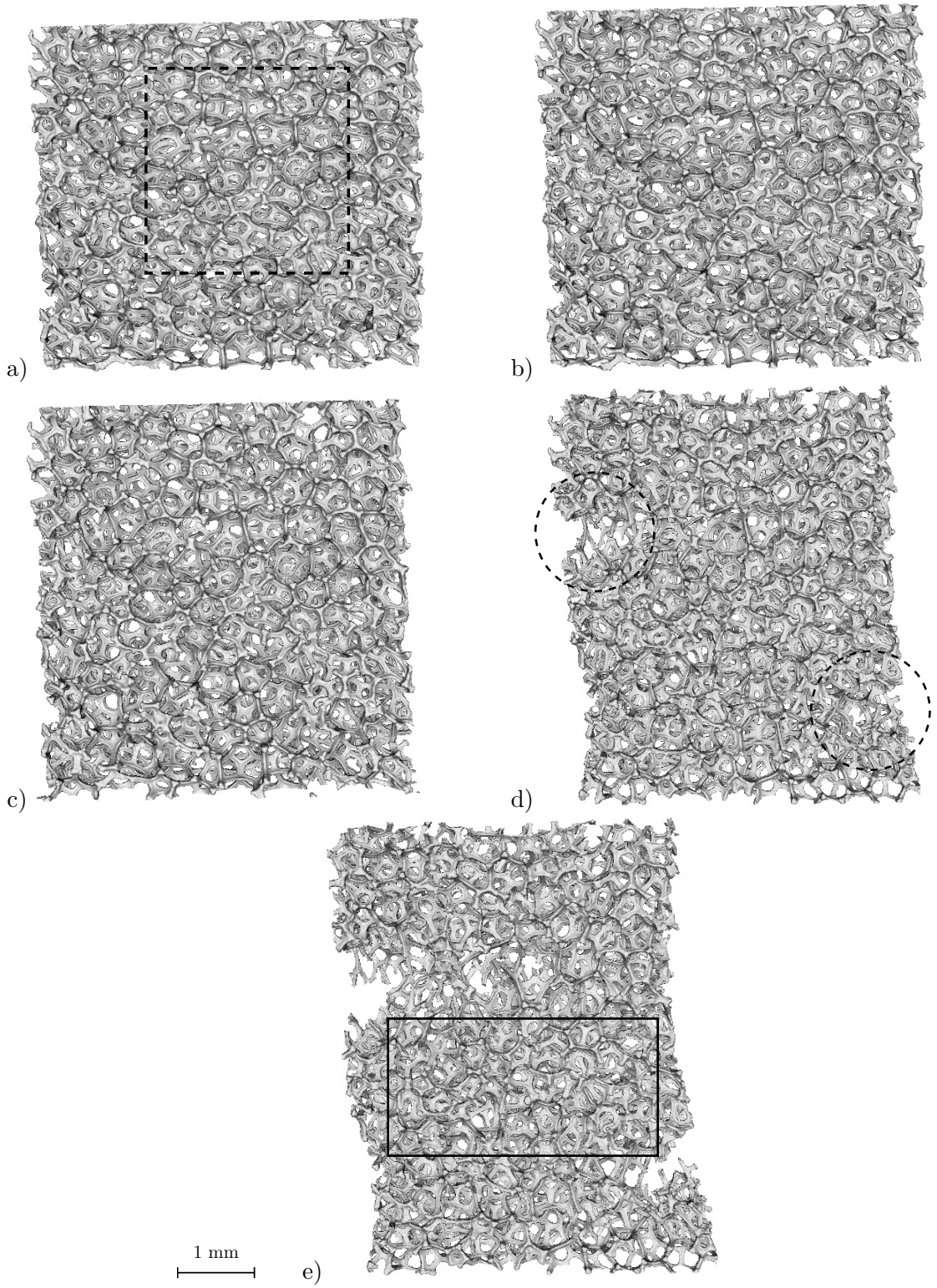



**Figure I.18** : 3D rendering of the TD scans : a) TD0 scan, b) TD1 scan, c) TD2 scan, d) TD3 scan, e) TD4 scan. The loading direction is vertical.

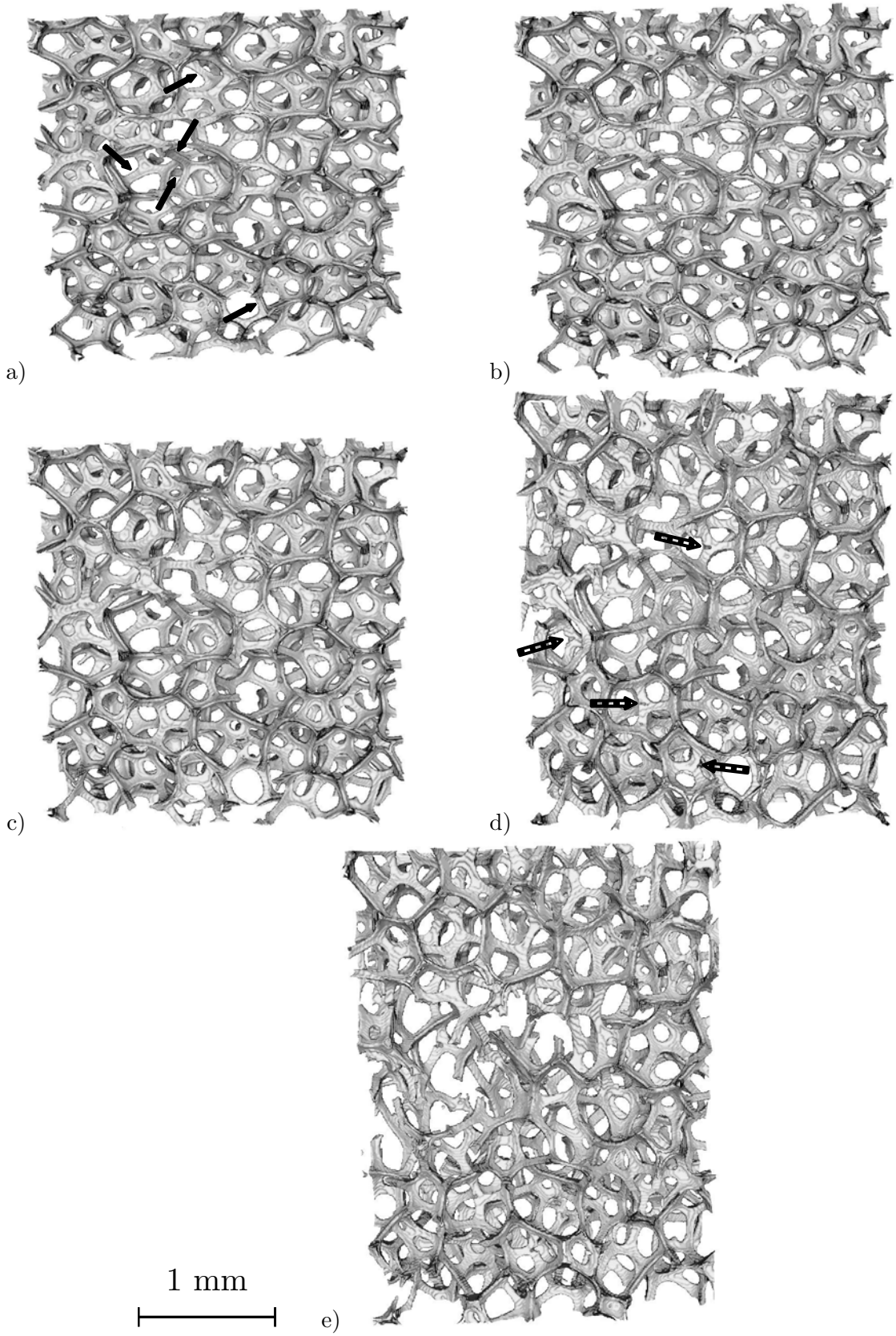



**Figure I.19** : Zoom on the 3D rendering of the TD scans : a) TD0 scan, b) TD1 scan, c) TD2 scan, d) TD3 scan, e) TD4 scan. Black arrows mark strut displacement whereas dotted arrows mark fractured struts. The loading direction is vertical.

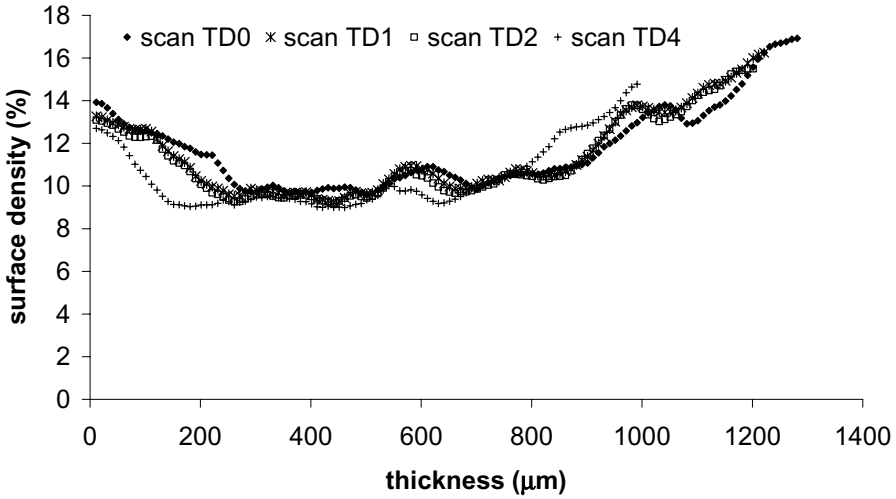



**Figure I.20** : Evolution of the TDR during tension along TD.

### I.4.4 In-situ compression test in direction ND

The deformation mechanisms of open-cell nickel foams have also been studied during a compression test. The in-situ compression curve is presented in figure I.21, where black dots indicate the position of the scans. Compression of open-cell nickel foams exhibits three main stages : an initial linear elastic regime at low stresses, followed by a stress peak and a decrease of the stress, and finally a densification regime in which the stress rises steeply. In most cellular foams, the second phase is a long plateau (Andrews et al., 1999; Nieh et al., 2000; Koza et al., 2004).

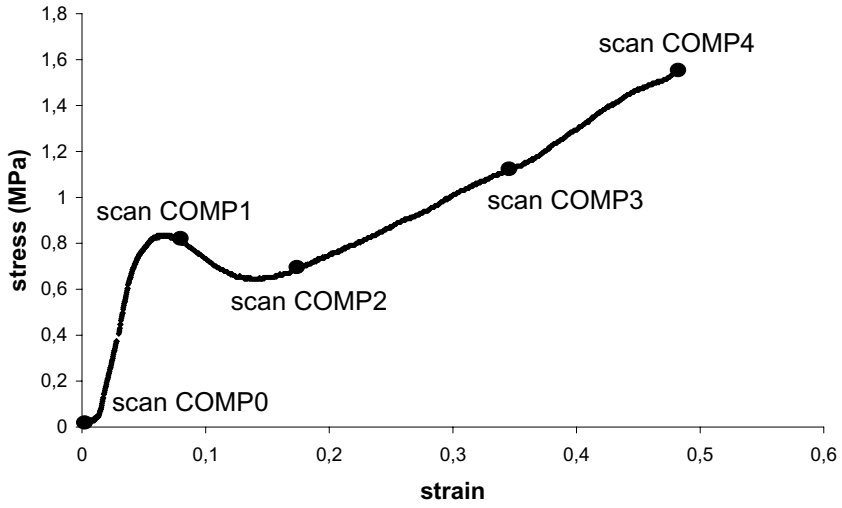



**Figure I.21** : In-situ compression curve.

One can note that the very beginning of the curve does not conform with the linear elastic slope. The reason is that the whole surface of the foam does not touch completely the machine plates. The beginning of the curve corresponds to the crushing of some parts of the foam until the whole surface is in contact with the plates.

The 3D renderings of each scan are shown in figure I.22. The 3D morphology of the initial state is given by the COMP0 scan. The COMP1 scan coincides with the stress peak. The COMP2 scan is close to the stress minimum after the peak of the curve whereas the COMP3 and COMP4 scans are taken at different levels of densification. The direction of compression is vertical.

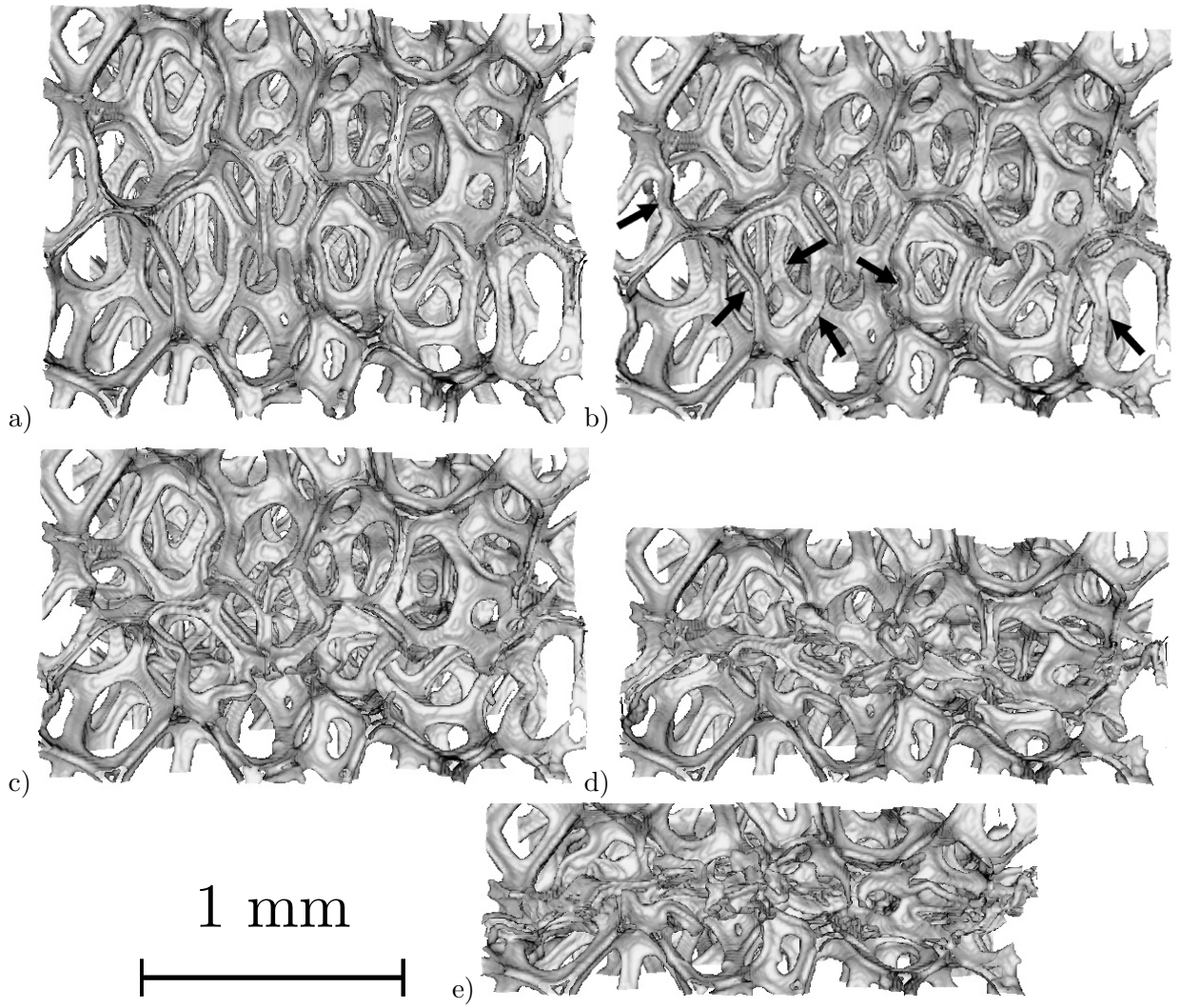



**Figure I.22** : 3D rendering of the compression scans : a) COMP0 scan, b) COMP1 scan, c) COMP2 scan, d) COMP3 scan, e) COMP4 scan. Black arrows indicate bent and buckled struts. The loading direction is vertical.

At low stresses, small amounts of bending are observed until the stress peak. Bent struts, marked by arrows in COMP1 scan, are longer, still aligned with the compression direction, and relatively localised in the same vertical plane. No bending of struts perpendicular to the load direction is observed. The linear elastic regime corresponds to the small reversible bending of struts more or less parallel to the compression direction. This small bending is enough to make the structure loose some rigidity because struts are hollow and very thin (10 $\mu$m thickness). From COMP1 scan (peak stress), bending becomes easier and buckling appears. That is why the stress decreases. Buckled struts can be observed in the COMP2 scan by looking at the evolution of the struts marked by an arrow in the COMP1 scan. Deformation of the buckled struts is localised in a small part of the struts. This is not the severe bending as Elliott et al. (Elliott et al., 2002) observed in polymer foams. However, buckling does not take place suddenly because the test is displacement controlled. At COMP2 scan, cells are almost collapsed and

struts are close together. The densification regime begins when struts impinge upon each other. A band of localisation of the deformation appears. The cells, located in the foam core, are totally collapsed (COMP3 scan) whereas cells, located at the top and the bottom of the sample, are still undeformed until a high level of compression (COMP4 scan).

To better analyse the deformation, an individual cell of the foam core has been isolated from the graph representation at different strain levels in figure I.23. One can note that the node-strut representation is only possible until COMP2 scan. For the scans at densification, it is not possible to distinguish cells in the middle of the foam. Moreover, this graph representation is ill-suited to describe compression tests because it does not take bent struts into account. Nodes are connected by straight lines. However, no supplementary nodes are added to the bent struts. The faces of the cells keep their initial number of sides.

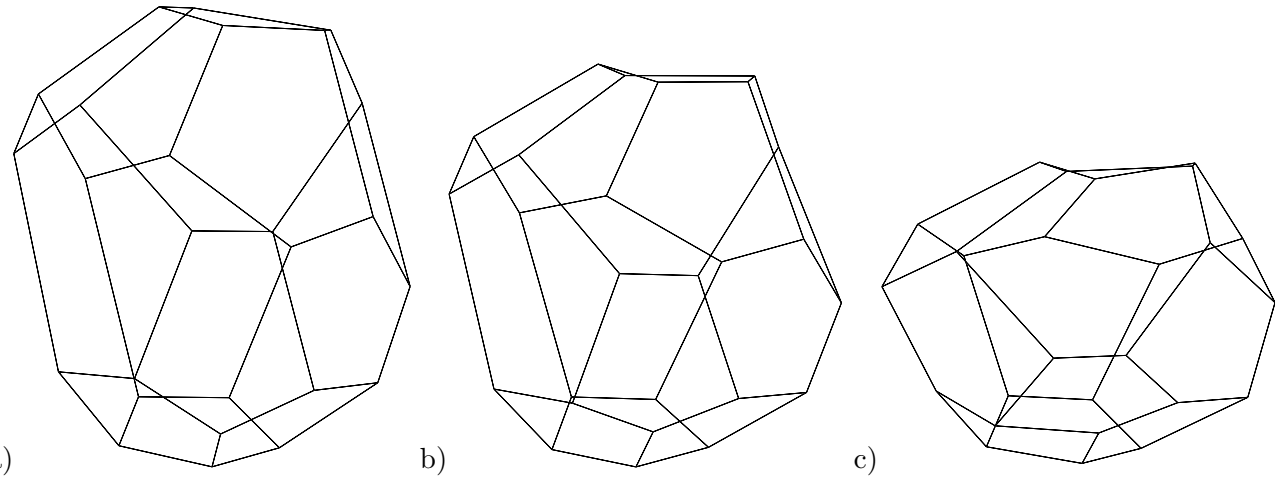



**Figure I.23** : Different states of compression – individual cell : a) COMP0 scan, b) COMP1 scan, c) COMP2 scan.

The effect of the strain localisation is also illustrated in figure I.24. The two node-strut representation (COMP0 and COMP2 scans) show clearly that the core of the foam is totally collapsed whereas the "skin" of the foam remains practically intact. Few cells have been represented in this figure to keep a good visibility of the core cell crushing. The formation of this band of compression can be understood by looking at the TDR evolution.

The evolution of the TDR has been plotted for the five scans in figure I.25. At the initial state, the classical curve of the nickel quantity through the sample thickness is retrieved. The nickel quantity is maximal at the surface of the foam and decreases until a plateau is reached. This plateau is around 600 $\mu$m long, which represents more than one third of the sample thickness. At the stress peak (COMP1 scan), the plateau is slightly shorter and higher than the initial one. But, no localisation of the deformation is detected. On the other hand, a bump appears in the middle of the plateau of the COMP2 scan. It means that the cells, located at mid-section of the foam, have crushed. The nickel quantity is thus increased. Then, this phenomenon is emphasized during the densification regime. One can note that the nickel quantity present at the surface of the foam is still the same during all the compression test, which is in good agreement with the qualitative observations. A localisation of the deformation arises in the core of the foam because the nickel quantity is lower. Bart-Smith et al. (Bart-Smith et al., 1998) and Baruchel et al. ((Baruchel et al., 2000), chapitre 10) also found that deformation was concentrated in a local area having initially the lowest density of the sample.

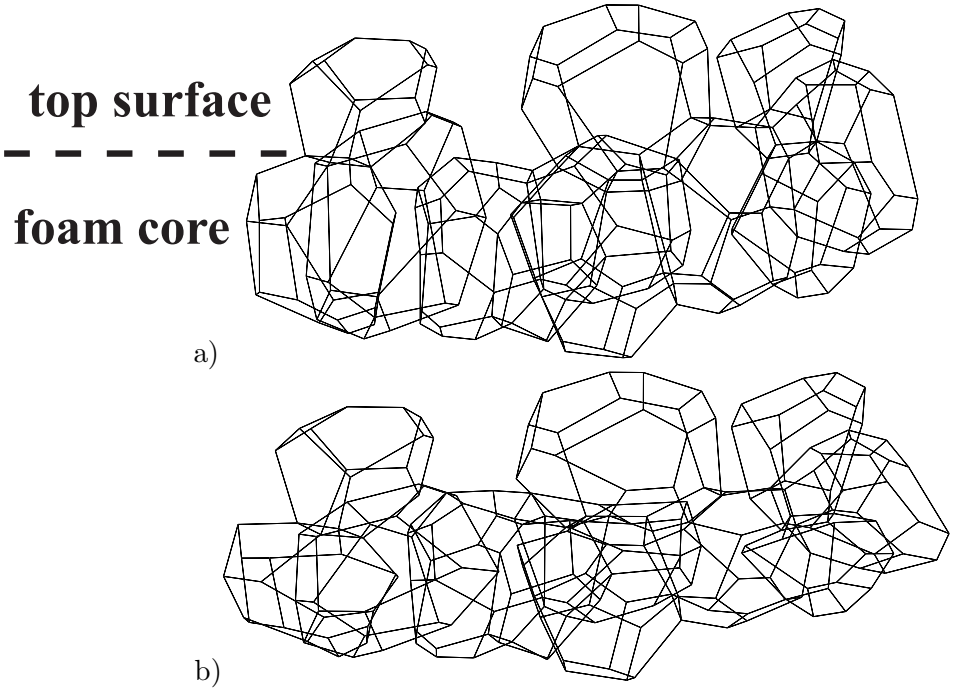



**Figure I.24** : Different states of compression – group of cells : a) COMP0 scan, b) COMP2 scan.

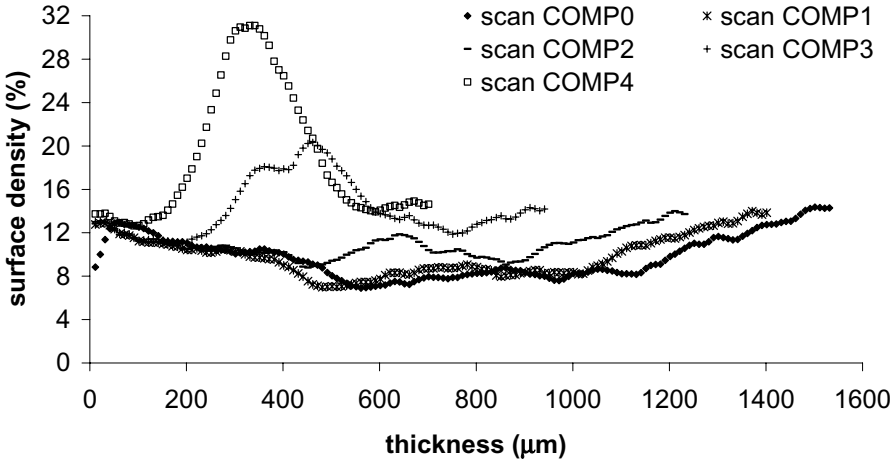
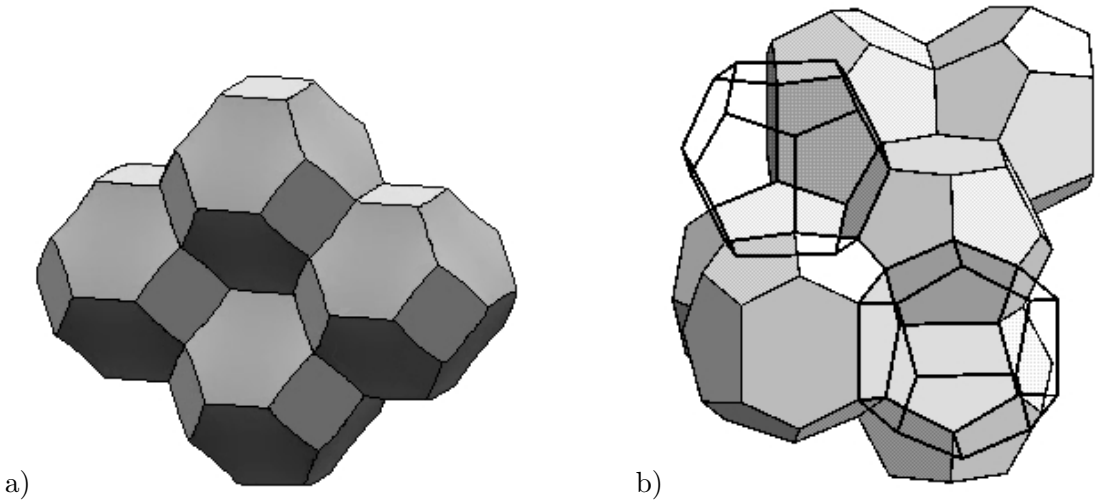



**Figure I.25** : Evolution of the TDR during compression.

## I.5 Discussion

### I.5.1 Typical cell shape in nickel foam : comparison with soap bubbles

In this section, the cell morphology of nickel foam is compared to those of other foams described in the literature. In 1887, Sir William Thomson, who became later Lord Kelvin, was the first to search and find the ideal structure of a monodisperse foam (Thomson, 1887). The cell that minimizes the surface area and can fill space is a tetrakaidecahedron. The Kelvin tetrakaidecahedron is composed by 14 faces : 8 hexagons and 6 quadrilaterals (see figure I.26a).



a) b)

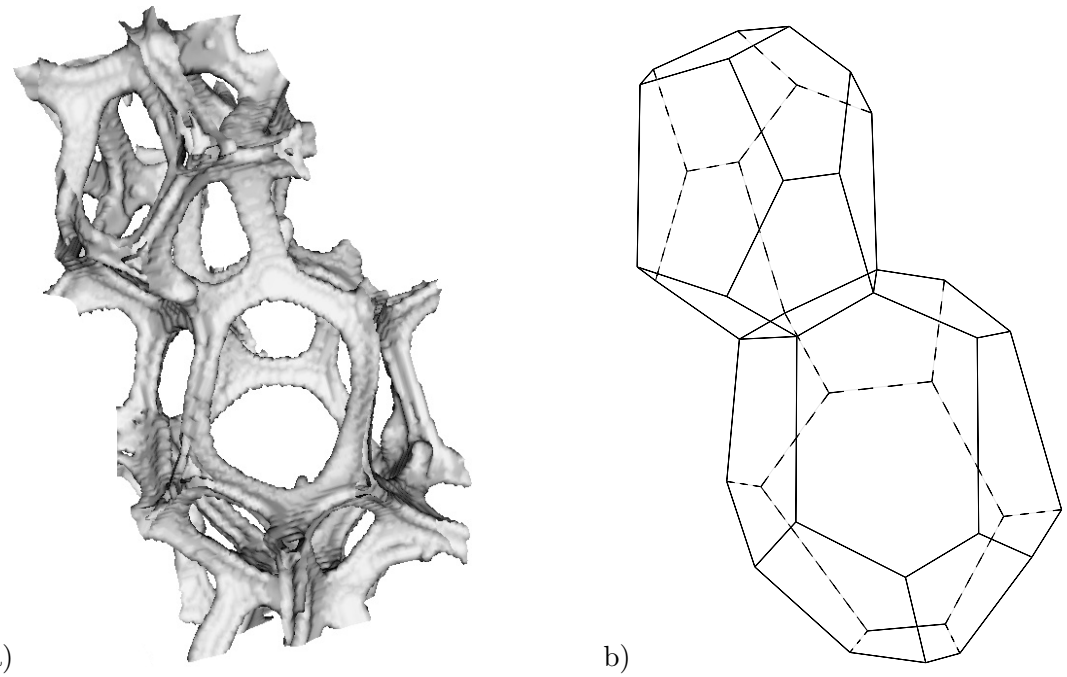
**Figure I.26** : Theoretical cells that minimizes the surface area : a) Kelvin tetrakaidecahedron, b) Weaire–Phelan foam.

No Kelvin's cell has been found in NiTECH foam. This result has been already noticed by Matzke in 1945 (Matzke, 1945). In its experiment, Matzke determined the structure of 1000 bubbles of a soap foam by looking at photographs (400 bubbles belonging to the first three layers and 600 others bubbles are located inside the foam) and no Kelvin's cell was observed. A reason for the absence of Kelvin's tetrakaidecahedron is given by Weaire and Phelan in 1994 (Weaire et Phelan, 1994). Kelvin cell assembly is not the lowest energy (surface area) structure. Indeed, Weaire and Phelan have found an assembly of cells for which the surface area is 0.3 % lower than for the Kelvin one. But, this assembly is not made of identical cells. The Weaire–Phelan structure is composed by eight cells : 2 pentagonal dodecahedra and 6 tetrakaidecahedra (see figure I.26b). The Weaire–Phelan tetrakaidecahedron is different from the Kelvin one. It has 12 pentagons and 2 hexagons. The Weaire–Phelan tetrakaidecahedron and pentagonal dodecahedron, close together, have been observed in NiTECH foams.
Figure I.27 shows the 3D rendering of the assembly of these two cells and the corresponding network.

However, the whole structure with the eight cells is not present in the foam and few Weaire–Phelan tetrakaidecahedra are observed. NiTECH foams contain a larger proportion of pentagonal dodecahedron. The Weaire–Phelan structure is derived from the A15 close packing that one can find in crystallography for the $\beta$-form of tungsten for instance. This A15 structure is included in a more general class : the tetrahedrally close-packed (TCP) (Kusner et Sullivan, 1996). Other foam structures of this class require less energy than the Kelvin one. According to Kraynik et al. (Kraynik et al., 2003), the Weaire–Phelan foam seems to be the optimal solution among all the TCP foams. But, no one can affirm that this structure is the solution of the Kelvin's problem.

A second reason for the absence of Kelvin's tetrakaidecahedron in NiTECH foams can be found in the book "The Physics of Foams" (Weaire et Hutzler, 1999, section 13.9). Weaire and Hutzler indicate that Kelvin cells must be found in the surface layers of the foam. However, nickel foams come from the foaming of polyurethane. This parallelepipedic polyurethane foam block is cut into slices of 1.6 mm thickness to serve as foam template (see section 2.). As a result, the nickel foams studied do not contain skin cells of the polyurethane foam but only bulk cells. That is why, no Kelvin cell is observed in NiTECH foams.

Table I.3 gives the average number of sides per face and the average number of faces per cell resulting from different observation in the literature (Matzke, Monnereau et al. (Monnereau et Vignes-Adler, 1998b)) or theories based on minimising surface area of foams (Kelvin, Weaire–Phelan).



a) b)

**Figure I.27** : Part of the Weaire–Phelan structure in open-cell nickel foams : a) 3D rendering, b) associated skeleton.

| Literature | $< f >$ | $< n >$ |
|---|---|---|
| Kelvin (Thomson, 1887) | 14 | 5.14 |
| Weaire–Phelan (Weaire et Phelan, 1994) | 13.4 | 5.10 |
| Matzke (Weaire et Phelan, 1994) | 13.7 | 5.12 |
| Monnereau (Monnereau et Vignes-Adler, 1998b) | 14.3 | 5.16 |
| This work | 13.0 | 5.07 |

**Tableau I.3** : Mean shape of the cell in a 3D foam.

The Matzke and Monnereau values given in the table are for bulk bubbles. For surface bubbles, that is the first three layers, the average number of faces per cell $< f >$ is around 11.
One can note that the average number of faces per cell is higher in the study of Monnereau et al.. But, only nine bubbles have been reconstructed. So, the statistic on the number of faces is low. This seems to explain this higher value.

Table I.3 shows that the average number of sides per face is less sensitive than the average number of faces per cell, and that our data are in good agreement with those found in the literature. However, they are lower than those calculated with the Weaire–Phelan structure and than the minimum values found by Aste et al.(Aste et al., 1996) for the TCP structures. According to Aste et al., a value of $< f >= 13.3$ corresponds to the minimal free energy in TCP structures (C15).

Another point of the Matzke study can be compared to the NiTECH foam results. Matzke found that 96 % of the cells have between 12 and 15 faces whereas it is only 80 % in our study. He also found that the proportion of pentagons is 66 % and that hexagons (22 %) are more numerous than quadrilaterals (11 %). These observations are in good agreement with our results even if our proportions of pentagons and quadrilaterals are respectively lower (57 %) and higher (17 %).

Moreover, for "central" bubbles, Matzke did not observe triangular and octogonal faces. However, the comparison with Matzke's work is difficult to draw because the relative density of Matzke's foam is not known.

Matzke also gave the shape of the most frequent cell. He found that the most abundant combination (19.6 %) is a 13-hedron formed by 1 quadrilateral, 10 pentagons and 2 hexagons. This shape is not well-represented in our study. Only 3.3 % of the cells correspond to this 13-hedron. On the opposite, the NiTECH most representative cell (2-8-2, see section c) at page 14) is in twelfth position and represents only 2.5 % in Matzke's classification. The six most frequent cells in Matzke's experiment are given in table I.4 and compared with our results.

| Matzke (Matzke, 1945) | | | | | This work |
|---|---|---|---|---|---|
| Shape | Quadrilateral face | Pentagonal Face | Hexagonal Face | Frequency (%) | Frequency (%) |
| 1 | 1 | 10 | 2 | 19.7 | 3.3 |
| 2 | 1 | 10 | 3 | 12.2 | 3.3 |
| 3 | 2 | 8 | 4 | 10.7 | 8.3 |
| 4 | 0 | 12 | 0 | 8.3 | 11.5 |
| 5 | 0 | 12 | 2 | 6.5 | 1.6 |
| 6 | 3 | 6 | 4 | 6.0 | 6.6 |

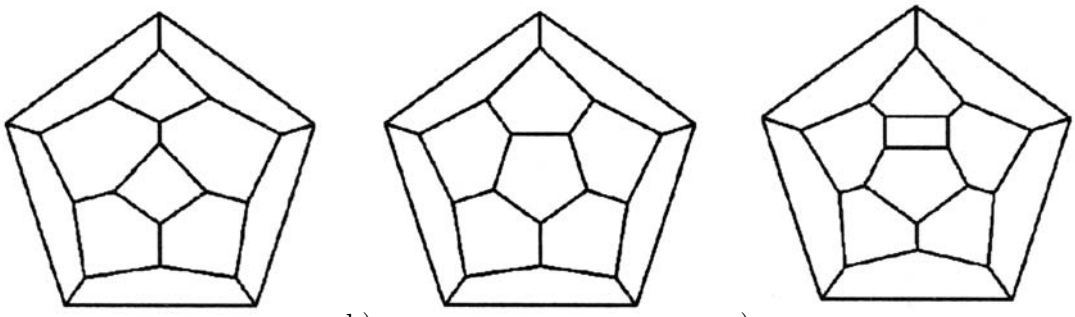
**Tableau I.4** : Shape of the most frequent cells : comparison with Matzke's experiment (Matzke, 1945).

One can note that the six most frequent Matzke cells are in NiTECH foam. However, the proportions are different and in agreement with the average number of faces. In Matzke's experiment, proportions are in favour of 14-hedron whereas, most of NiTECH cells contain 12 faces.
The proportion of the combinations (2-8-4) and (0-12-0) are important in the two experiments. But, the most frequent cell is different : (1-10-2) for Matzke's experiment and (2-8-2) for NiTECH foams. An explanation of this phenomenon can be found in morphological rearrangements and transformation of the foam cells. During the coarsening of foams, topological change (T1) and transformation (T2) can appear (Monnereau et Vignes-Adler, 1998a; Weaire et Hutzler, 1999). T1 corresponds to the creation of a new face between two neighboring bubbles, whereas T2 corresponds to the disappearance of a bubble. According to Williams (Williams, 1968), the Kelvin cell can be modified to form a different tetrakaidecahedron that contains mostly pentagons. The resulting cell has 2 quadrilaterals, 8 pentagons and 4 hexagons. The combination (2-8-4) is thus the result of the transformation of the Kelvin cell. Moreover, Kraynik et al. (Kraynik et al., 2003) explain, with the help of Schlegel diagrams (see figure I.28), that a pentagonal dodecahedron can turn into a (2-8-2) combination with topological change T1 and that the tetrakaidecahedron (1-10-2) can be changed in a pentagonal dodecahedron by losing the quadrilateral face (transformation T2). So, during the foaming process of the polyurethane, topological change T1 must take place more often than in Matzke's experiment.

One can also note that the Euler's equation (Weaire et Hutzler, 1999, section 3.3.4.), which provides a relationship between the number of sides per face and the number of faces per cell, is well respected in our study :

$$< n >= 6 - \frac{12}{< f >} = 6 - \frac{12}{13.02} = 5.078 \tag{I.6}$$

To conclude this section, one can say that the results in the topology of NiTECH foams are similar to those found for soap bubbles. This sounds logical since wet closed cell foams are at the origin of nickel



a) b) c)

**Figure I.28** : Schlegel diagrams : a) combination 2-8-2, b) combination 0-12-0, c) combination 1-10-2.

foams. An explosion of the hydrogen rich cell gas causes the cells to collapse turning the foam into an open-cell foam. Phenomena like drainage and gravity responsible for the shape of the cells, are the same for soap bubbles as polyurethane foams. However, X-ray microtomography can give more statistical informations and more rapidly than a binocular study as Matzke did. Moreover, non transparent material to white light, like metal foams, can be studied through this modern technique.

### I.5.2 Geometrical versus mechanical anisotropy

The mechanical anisotropy of the Young's modulus has been related to a geometric parameter by Gibson and Ashby in (Gibson et Ashby, 1997). These authors use the idealized anisotropic unit cell of figure I.11a. They define the geometry aspect ratio R as the ratio between the height $h$ (the largest dimension) and the length of the square side $l$. Badiche et al. (Badiche et al., 2000), who studied the anisotropy of open-cell nickel foam by electrical and mechanical tests, have inferred a geometry aspect ratio of 1.5. They expect that the cell is 1.5 longer along the direction RD than along the direction TD. This value of 1.5 will be discussed in section III.1.2. In our study, $h$ is equal to $b$ and $l$ to $a$ or $c$.

According to section f) at page 17, the "average" geometry aspect ratio is :

$$R = \frac{h}{l} = \frac{b}{a} = \frac{520}{419} = 1.24 \tag{I.7}$$

This difference is due to the choice of the unit cell ($a = c < b$) which is not representative of the measured ellipsoid parameters. Indeed, by choosing a parallelepipedic cell (see figure I.11b where a, b and c are all different), the geometry aspect ratio between the coiling and the transverse direction is reduced.

The same method, as that used by Gibson and Ashby (Gibson et Ashby, 1997, p.259), is employed to determine the ratio of the Young's moduli for the general anisotropic cell of the figure I.11b. The ratio of Young's moduli is expressed in terms of two geometrical ratios $R$ and $Q$. These ratios are defined as the following :

$$R = \frac{b}{a} \qquad \text{and} \qquad Q = \frac{c}{a} \tag{I.8}$$

In figure I.11, the vertical (resp. horizontal) axis is labelled the axis $b$ (resp. $a$). The coiling direction of the foam is thus aligned with the $b$-direction whereas the transverse direction is aligned with the $a$-direction. During loading in direction $b$, the total force F, applied in beams of length $a$ ($F_a$) and $c$ ($F_c$) is proportional to $(\sigma_{bb} * a * c)$. Moreover, in the linear elasticity regime, the beams of length $a$ and $c$ respond to the load by bending.

Their deflections, $\delta^a$ and $\delta^c$, are proportional to :

$$\delta^a \propto \frac{F_a\ a^3}{E_{Ni} I} \qquad \text{and} \qquad \delta^c \propto \frac{F_c\ c^3}{E_{Ni} I} \tag{I.9}$$

The deflections of the beam of length $a$ and $c$ are considered as equal.

So, the equations for the parallelepipedic cell of the figure I.11b are :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F & = & F_a + F_c \propto \sigma_{bb}\ a\ c \\ \delta^a & = & \delta^c \propto \varepsilon_{bb}\ b \end{array} \right. \tag{I.10}$$

The expression of the Young modulus $E_b$ in the coiling direction can be deduced :

$$E_b = \frac{\sigma_{bb}}{\varepsilon_{bb}} \propto E_{Ni} I\ \frac{b}{ac} \left( \frac{1}{a^3} + \frac{1}{c^3} \right) \tag{I.11}$$

By permutting $a$ with $b$, the Young modulus $E_a$ when loading in the transverse direction is obtained.
As a result, assuming the proportionality factor in equation (I.11) is the same for directions b and a, the ratio of the Young's moduli is thus equal to :

$$\frac{E_b}{E_a} = \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{c^3}}{\dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3}} \right) \qquad i.\text{e.} \qquad \boxed{\frac{E_b}{E_a} = R^2\ \frac{1 + \dfrac{1}{Q^3}}{\dfrac{1}{R^3} + \dfrac{1}{Q^3}}} \tag{I.12}$$

If $Q = 1$, the same ratio of the Young's moduli as that expressed by Gibson and Ashby (Gibson et Ashby, 1997, p.260) is found :

$$\left( \frac{E_b}{E_a} \right)_{\substack{\text{Gibson and} \\ \text{Ashby cell}}} = R^2\ \frac{2}{1 + \dfrac{1}{R^3}} \tag{I.13}$$

The results, obtained from 3D image analysis and deduced by the three mean parameters of the equivalent ellipsoid (see section f) at page 17), give a ratio of 2.44.

$$\left( \frac{E_b}{E_a} \right)_{\text{Tomography}} = 2.44 \pm 0.92 \tag{I.14}$$

On the other hand, Young's moduli of the foam in coiling and transverse direction, have been experimentally determined by other macroscopic tensile tests (see section III.1.2).
The values are the following :

$$E_b = E_{RD} = 537 \pm 29 \text{ MPa} \qquad \text{and} \qquad E_a = E_{TD} = 182 \pm 8 \text{ MPa} \tag{I.15}$$

So, the ratio of the Young's moduli is :

$$\left( \frac{E_b}{E_a} \right)_{\text{Mechanical Tests}} = 2.95 \pm 0.3 \tag{I.16}$$

These ratios measured independantly are similar. The ratio of the Young's moduli, deduced from tomographic results, is in reasonable agreement with that found from mechanical tests.

### I.5.3 Evolution of cell orientation

In this section, the evolution of the dimensions and orientations of the cells during loading is discussed. The analysed volumes are indicated by black boxes in the 3D rendering images (see the RD0 scan on figure I.15 and the TD4 scan on figure I.18). The dimensions of these boxes are 2.3 mm height, 4.9 mm width and 1.68 mm thickness for tensile test in the coiling direction and 2 mm height, 3.9 mm width and 1.68 mm thickness for the tensile test in the transverse direction. They contain respectively 123 and 76 cells. Incomplete border cells are excluded again. For compression test, the volume scanned is 3 mm long, 2 mm width and 1.68 mm height. Only 39 cells are complete.

The method explained in section f) (page 17) is applied again. For each cell, the three dimensions of the equivalent ellipsoid ($a$, $b$, $c$) are determined. $a$, $b$, and $c$ represent respectively the smallest, the medium and the largest axes. The mean values of these three parameters are given in table I.5 at each deformation stage. Their distributions for the initial state and for the scan just before cracking are plotted in figures I.29, I.30 and I.31. The RD4, TD3 and TD4 scans are not mentioned because crack initiation makes the results difficult to interpret. For the COMP3 and COMP4 scans, no 3D image analysis is possible due to the densification of the foam core.

| | Loading direction | Scan number | a ($\mu$m) | b ($\mu$m) | c ($\mu$m) | R=b/a |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tension | RD | 0 | 404 ± 12 | 511 ± 14 | 624 ± 17 | 1.28 ± 0.07 |
| | | 1 | 404 ± 12 | 513 ± 14 | 621 ± 16 | 1.28 ± 0.07 |
| | | 2 | 401 ± 12 | 525 ± 14 | 627 ± 16 | 1.32 ± 0.07 |
| | | 3 | 388 ± 13 | 521 ± 17 | 627 ± 20 | 1.36 ± 0.09 |
| | TD | 0 | 406 ± 15 | 521 ± 20 | 611 ± 21 | 1.29 ± 0.1 |
| | | 1 | 428 ± 16 | 521 ± 19 | 607 ± 20 | 1.22 ± 0.09 |
| | | 2 | 447 ± 18 | 514 ± 18 | 594 ± 19 | 1.16 ± 0.09 |
| Compression | ND | 0 | 405 ± 20 | 509 ± 26 | 620 ± 31 | 1.26 ± 0.04 |
| | | 1 | 408 ± 21 | 500 ± 24 | 604 ± 29 | 1.23 ± 0.04 |
| | | 2 | 379 ± 22 | 465 ± 22 | 595 ± 28 | 1.24 ± 0.05 |

**Tableau I.5** : Evolution of the mean values of the three axes of the equivalent ellipsoid.

In this table, one can note that the three initial states are almost identical. They are also similar to the dimensions found in section f) at page 17. For the initial state, the mean value of $a$ is about 400 $\mu$m, whereas $b$ and $c$ are respectively 510 $\mu$m and 620 $\mu$m. So, the same value, as that reported in section I.4.3, is found for the geometric aspect ratio R. R ranged from 1.25 to 1.3.

When loading is applied in the coiling direction, the $a$-parameter decreases, the $b$-parameter increases slightly and the $c$-parameter remains almost unchanged. Fluctuations of the three parameters are small. Figure I.32 represents the orientation of the $a$, $b$, and $c$ axes in the (TD, RD) plane.

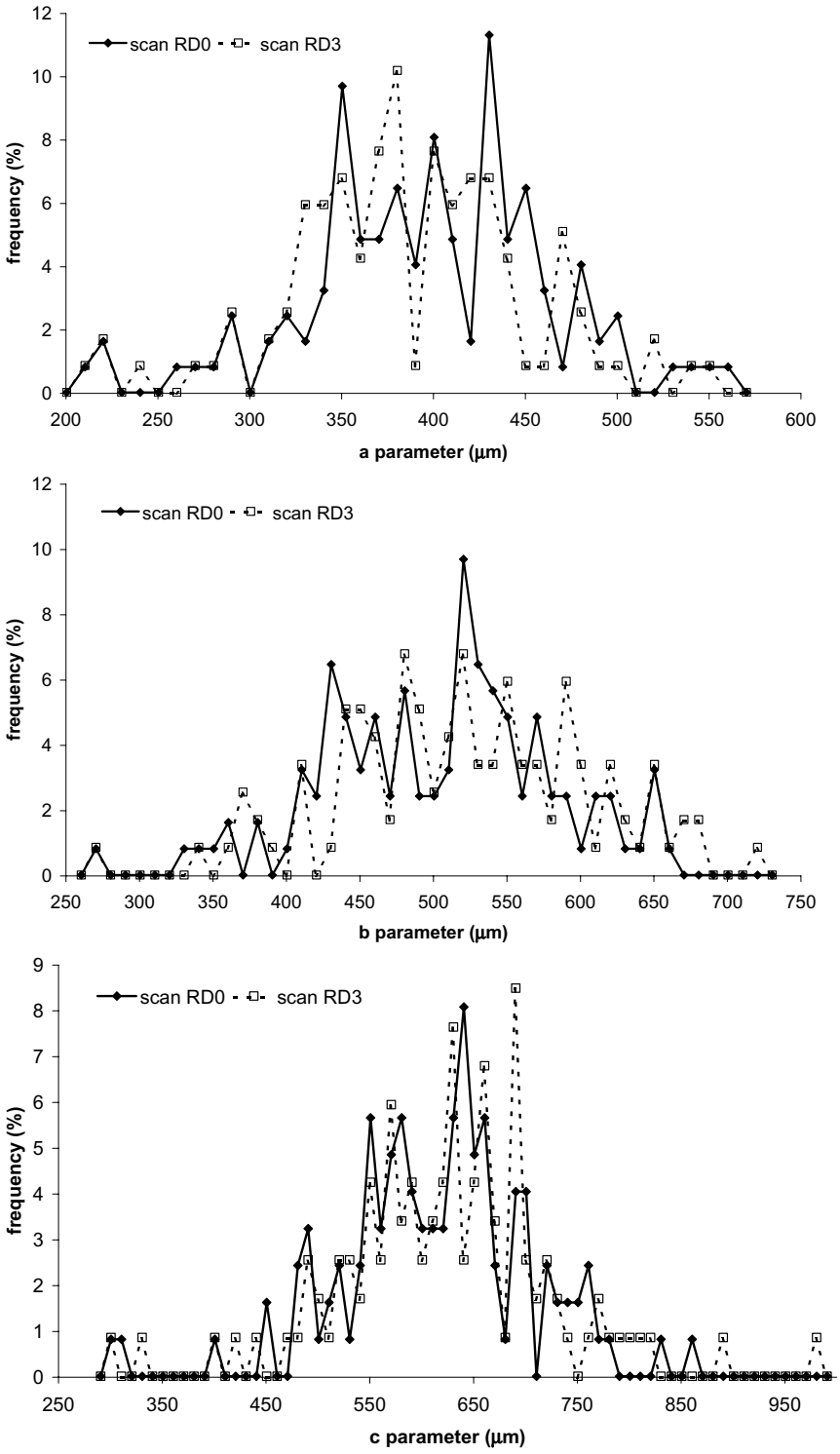



**Figure I.29** : Evolution of the length distribution of the axes of the equivalent ellipsoid during tensile loading in the coiling direction RD.

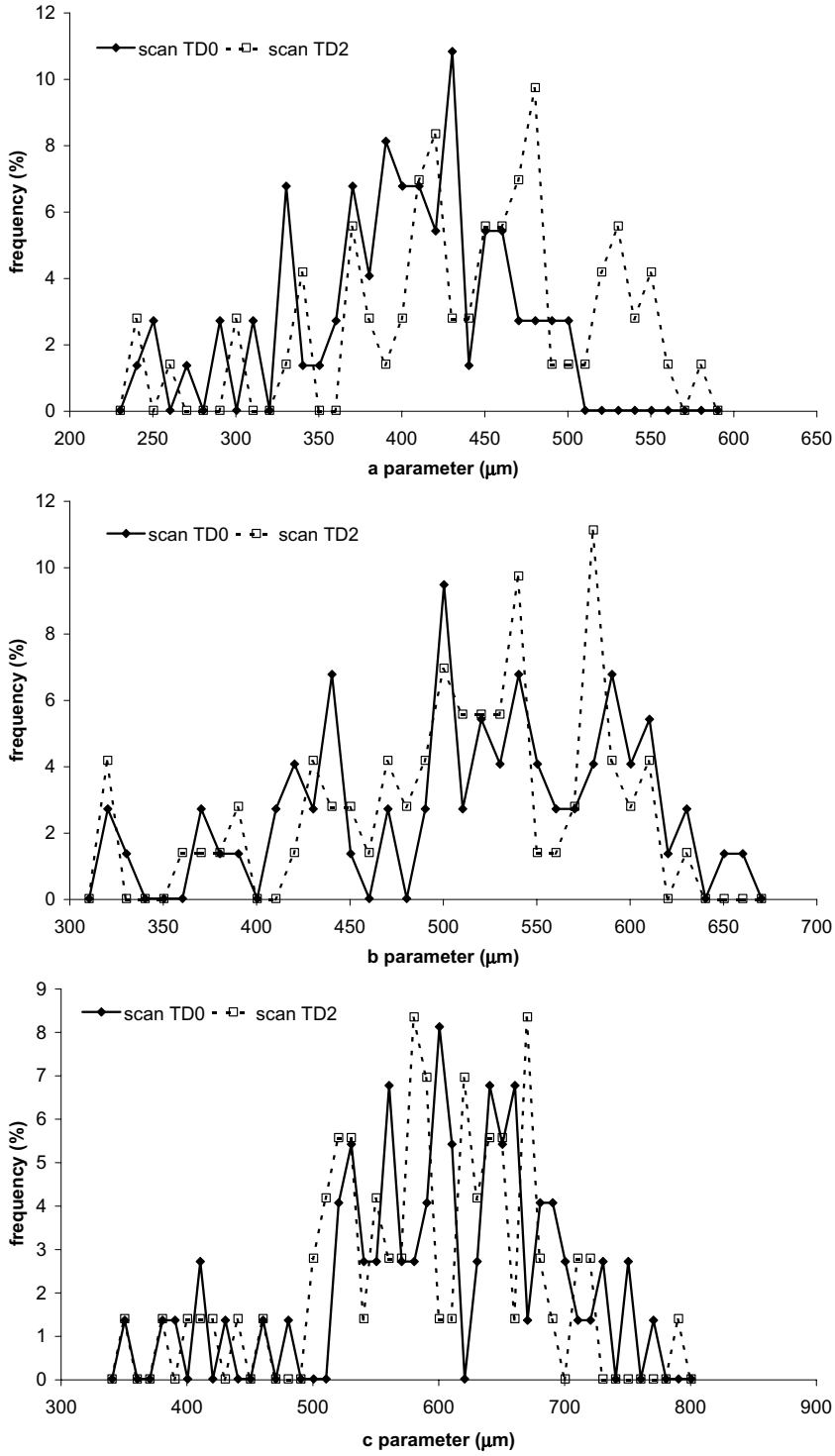



**Figure I.30** : Evolution of the length distribution of the axes of the equivalent ellipsoid during tensile loading in the transverse direction TD.

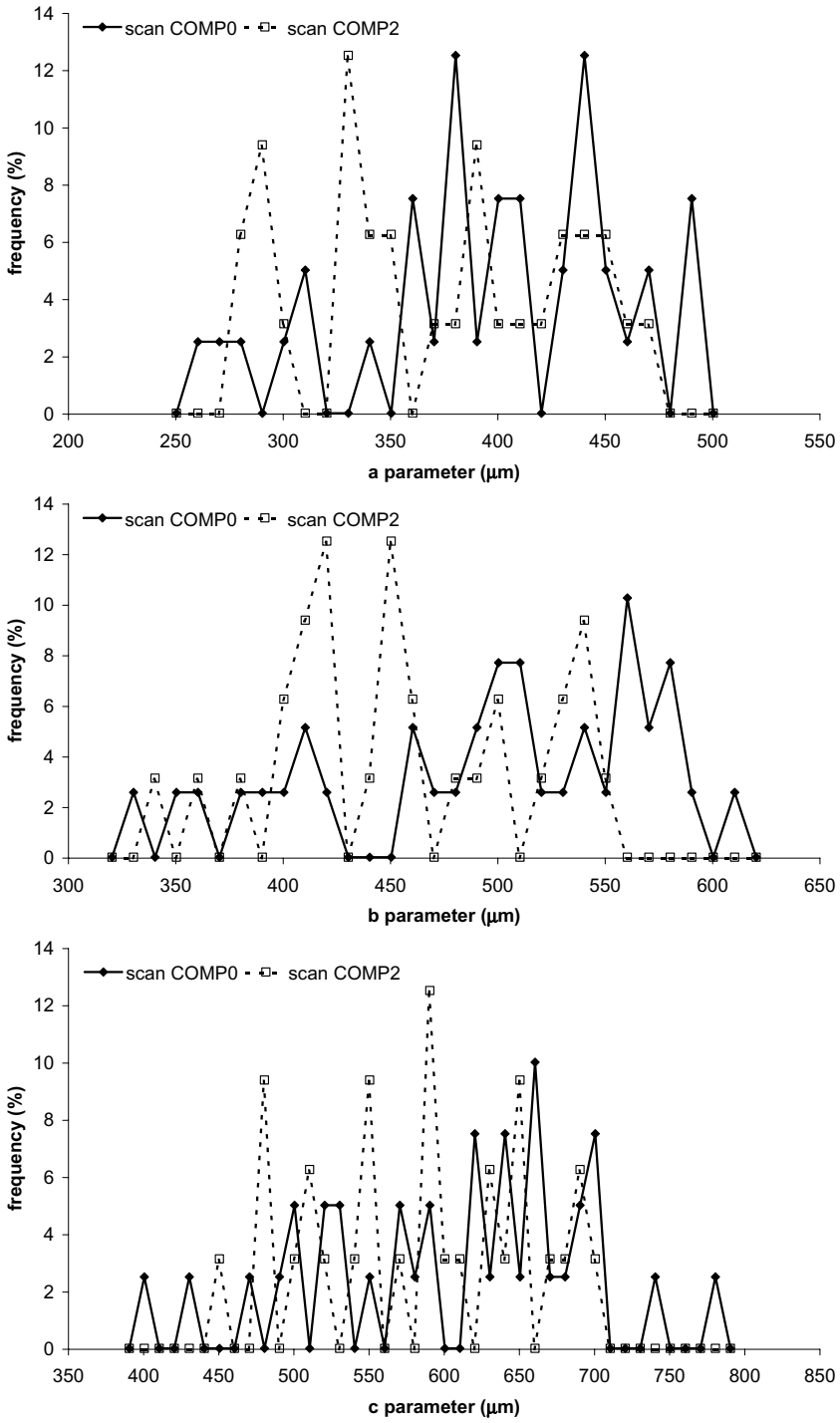



**Figure I.31** : Evolution of the length distribution of the axes of the equivalent ellipsoid during compression test in the normal direction ND.

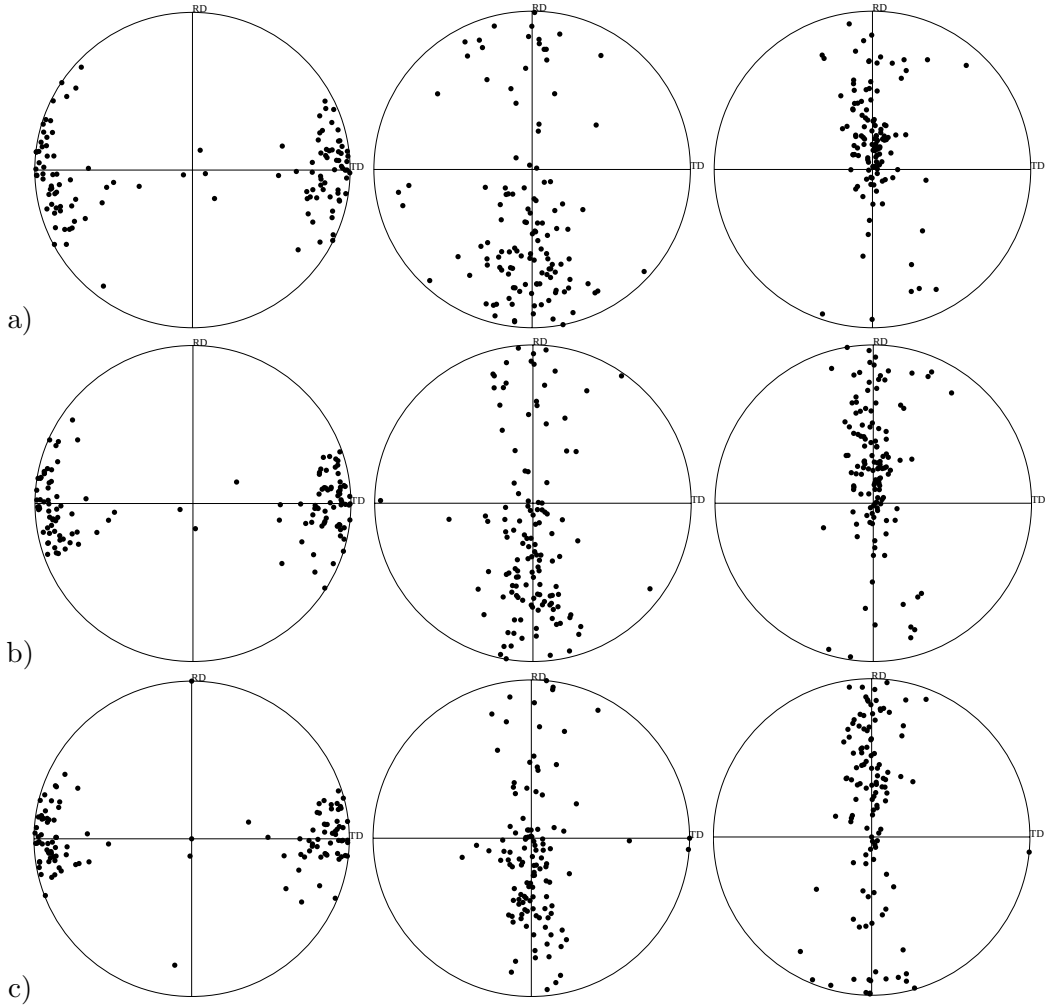



**Figure I.32** : Evolution of the orientation of the axes of the equivalent ellipsoid in the (TD, RD) plane during tensile test in the coiling direction – $a$-axis (Left), $b$-axis (Middle), $c$-axis (Right) – : a) RD0 scan, b) RD2 scan, c) RD3 scan.

At the initial state, the same result as in section f) (page 17) is found. The $a$-axes are oriented along the transverse direction, the $b$-axes are more or less aligned with the coiling direction and the $c$-axes are rather oriented normal to the foam sheet. So, during the tensile test in the coiling direction, the parameter $b$ should increase whereas the two others should decrease. Table I.5 shows that the $a$-parameter is decreasing but the expected tendency is not really clear for the parameters $b$ and $c$. One reason can be given by looking at the orientations of the axes. Indeed, as figure I.32 shows, the distribution of the orientations of the $b$-axes, which is initially close to the RD pole, moves generally towards ND pole (RD3 scan) during the loading. The reverse phenomenon is observed for the parameter $c$. This is due to the fact that cells are not simply stretched but undergo significant rotations. Only the $a$-axes seem to keep their initial orientation. During loading, its distribution is tightening on the TD pole. One can consider that the evolution of the $a$-parameter represents the deformation of the material in the transverse direction when traction is along the coiling direction. The maximal deformation of the mean $a$-parameter, just before cracking between RD0 and RD3 scans, using the data of table I.5, is 4 %. The same result is found during macroscopic tests which measure at the same time deformation of the foam in the three directions (see section V.1).

The same orientation of the initial state is obtained for the TD0 scan (see figure I.33). The $a$-axes are oriented to the transverse direction, the $b$-axes are aligned with the coiling direction and the $c$-axes are mainly in the normal direction. So, when the loading is applied in the transverse direction, the $a$-parameter should increase whereas the parameters $b$ and $c$ should decrease. This is what it is observed in table I.5. If the smallest axis increases and the others parameters decrease, the ellipsoid becomes more spherical. The cells become more isotropic and the orientation of the axes is better distributed in space. TD2 scan on the figure I.33 shows this phenomenon. The distribution of the orientation of the three parameters is rather random. One can note that the distribution of the $a$-parameter (see figure I.30) shows clearly the increase of the $a$-parameter. The deformation seems to transform the initial distribution into an asymmetric one, with a long tail for the smallest values.

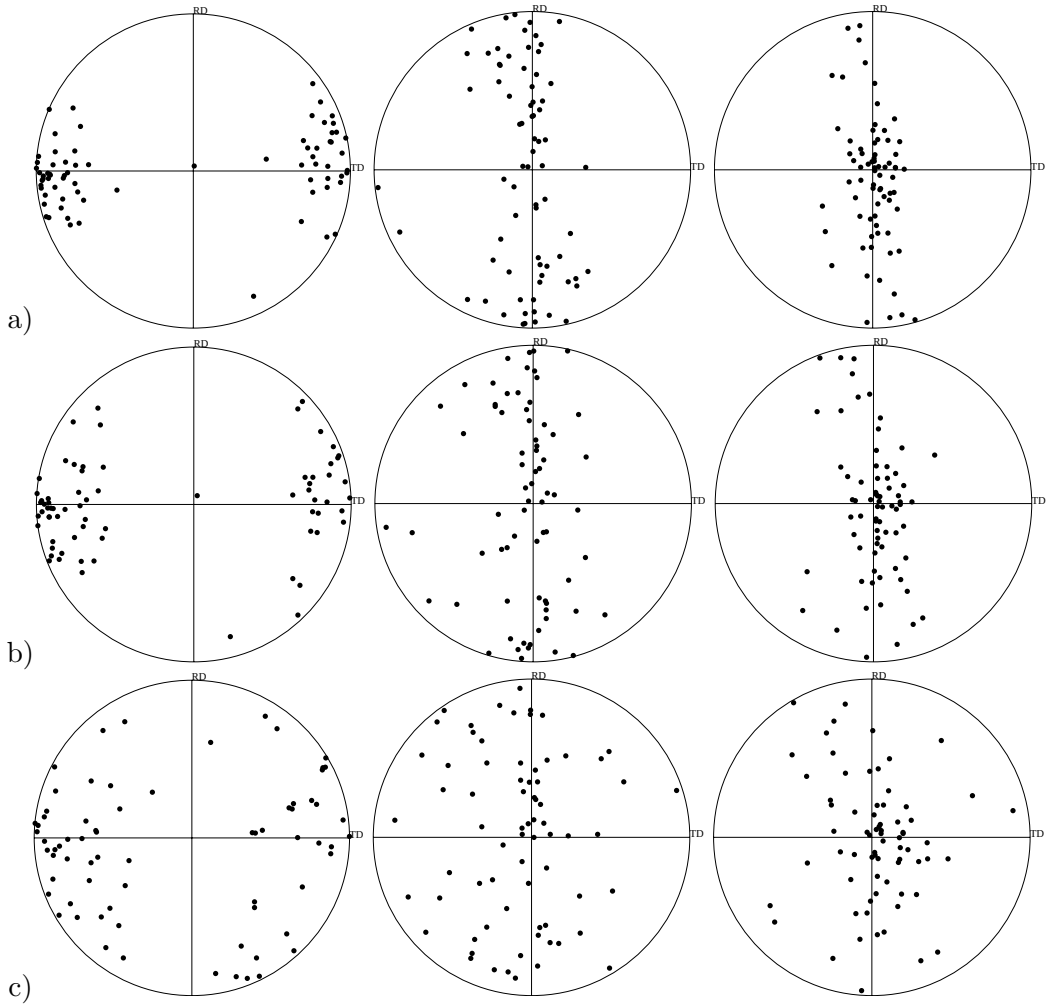



**Figure I.33** : Evolution of the orientation of the axes of the equivalent ellipsoid in the (TD, RD) plane during tensile test in the transverse direction – $a$-axis (Left), $b$-axis (Middle), $c$-axis (Right) – : a) TD0 scan, b) TD1 scan, c) TD2 scan.

As can be seen on figure I.34, the analysis of the compression test suffers from poor statistics. One can also note that the initial orientation of the three parameters of the foam is slightly rotated by an angle of 5.8°. This angle is due to a bad placement of the sample on the plate of the compression machine. Table I.5 shows that all the parameters decrease during the compression. This tendency is well confirmed by the distribution of the three parameters between COMP0 and COMP2 scans (see figure I.31).

A shift towards the low values is clearly observed. This result is surprising. Indeed, the c-parameter should decrease whereas the others should increase. A reason for that lies in the 3D image analysis method itself. 3D image analysis detects the nodes position and their connectivity but does not consider struts bending. A straight line links two nodes, no matter the shape of the interconnecting strut. However, bending and buckling are the main deformation mechanisms in compression (see section I.4.4). Buckling significantly reduces the distance between nodes.

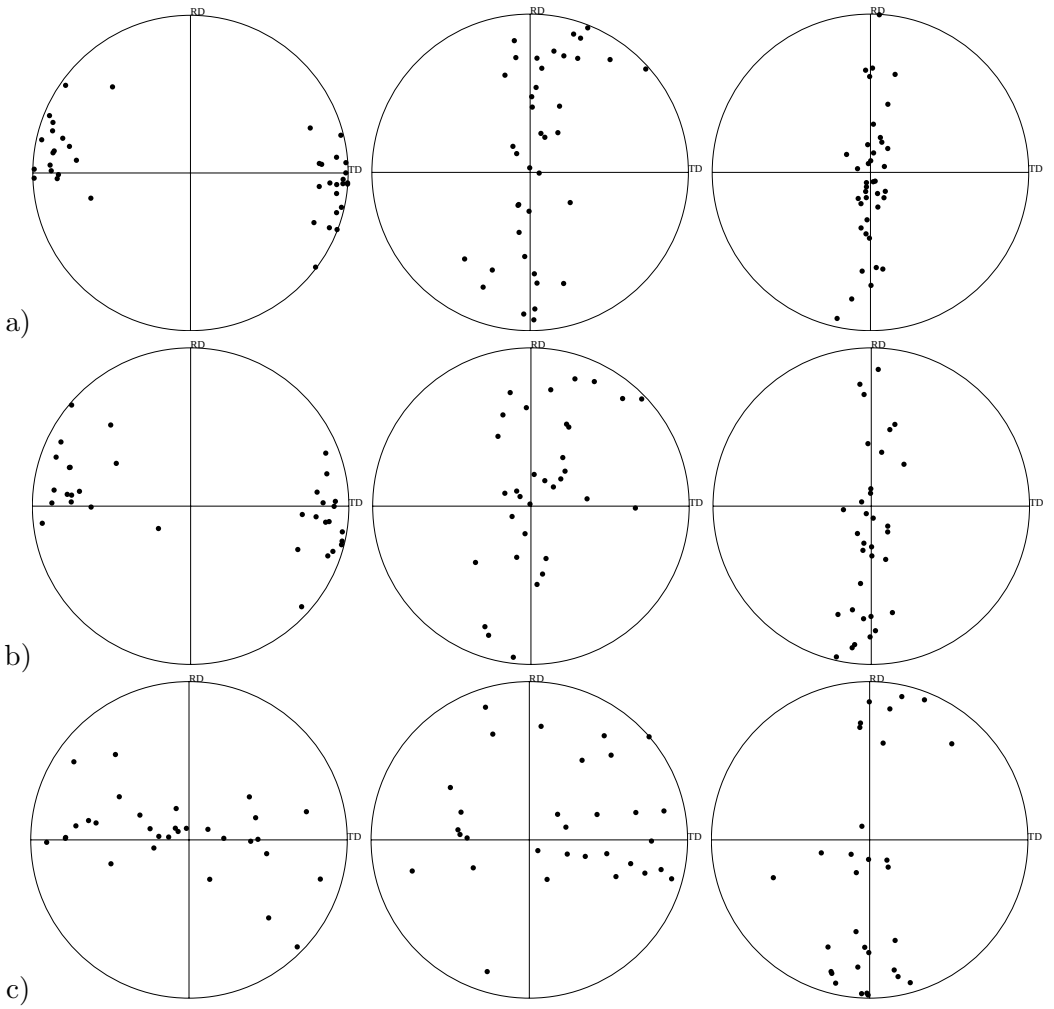
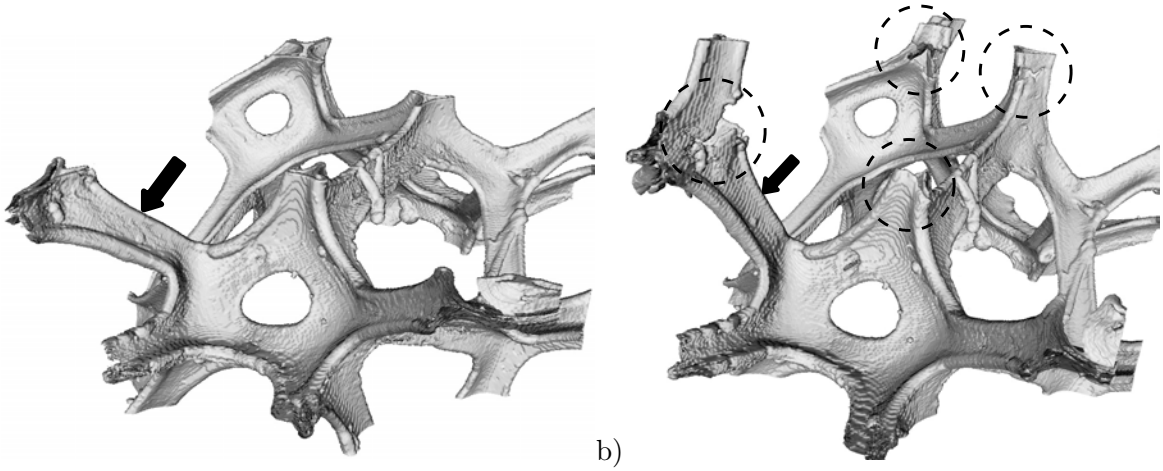



**Figure I.34** : Evolution of the orientation of the axes of the equivalent ellipsoid in the (TD, RD) plane during compression test in the normal direction – $a$-axis (Left), $b$-axis (Middle), $c$-axis (Right) – : a) COMP0 scan, b) COMP1 scan, c) COMP2 scan.

### I.5.4 Damage and cracking

As explained in section I.4.2 and illustrated by figure I.19, the rotation of struts induces damage during a tensile test. An example of strut alignment (marked by a black arrow) is showed in figure I.35 at a resolution of 2 $\mu$m.

This alignment leads to fracture at the junction because all the nodes are linked together. Nodes cannot move freely. So, if one tip of the struts moves more than the other, bending and then fracture appear close to the node that cannot move. Fracture takes place at the nodes of the foam, as is clearly shown in figure I.35, rather than along the struts. This may be due to a high stress concentration at nodes.



a) b)

**Figure I.35** : 2 $\mu$m resolution : a) initial state, b) cracked state. The loading direction is vertical.

Remember that nodes also are hollow. An exception can be made when the strut is perfectly aligned with the tensile direction (see section II.4). In this exceptional case, fracture occurs in the middle of the strut. The strut in under pure tension.

Moreover, no damage in the whole area of interest is observed during a tensile test. Damage is localized in narrow cracked zones. However, this damage is distributed in a small area. The characteristic length of this crack area is around 5 cells (see figure I.36).
On figure I.36, the vertical axis represents the tensile direction and the thickness of the foam lies along the horizontal direction. The width of the sample is perpendicular to the plane of figure I.36. The crack propagates along the width of the sample and cracked zones are marked by dotted circles. This figure clearly shows that the crack area is 5 cells high.

In open-cell nickel foams, cracks always initiate at a lateral boundary of the sample. This phenomenon is due to the larger relative displacement of the nodes of the struts located at the boundary. Indeed, struts located at these boundaries have one tip that can move easily and one tip that cannot move (because of its link with the others struts of the foam). So, strut alignment, that provides crack initiation, are much more important at the lateral boundaries of the foam.
Figures I.37 and I.38 show this free edge effect.

The initial and deformed stages are represented for the same area located at the boundaries of the foam. On figure I.37, the lateral boundary of the specimen is on the left. The right boundary of the sample is not visible in this photography and the width of the sample is in the horizontal direction. The circle shows a surface cell that deforms more than the core cells. The same effect is observed in figure I.38 where the thickness of the sample is aligned with the horizontal direction.

When a crack starts, a strut is broken and the load is redistributed on the next cells. The broken part is free and can easily move and align with the loading direction. The strut, which is diametrically opposed to the crack propagation, undergoes a larger relative displacement of its nodes and breaks in turn. The crack propagates cell by cell. However, some struts still bridge the crack even though the main crack has gone through the area. The dotted box in the figure I.39 represents the area where the struts are still linked.

It is similar to ligaments between cavities in ductile fracture in a bulk material. This may be explained by the competition existing between strut alignment and strut hardening. If the strut is still aligned

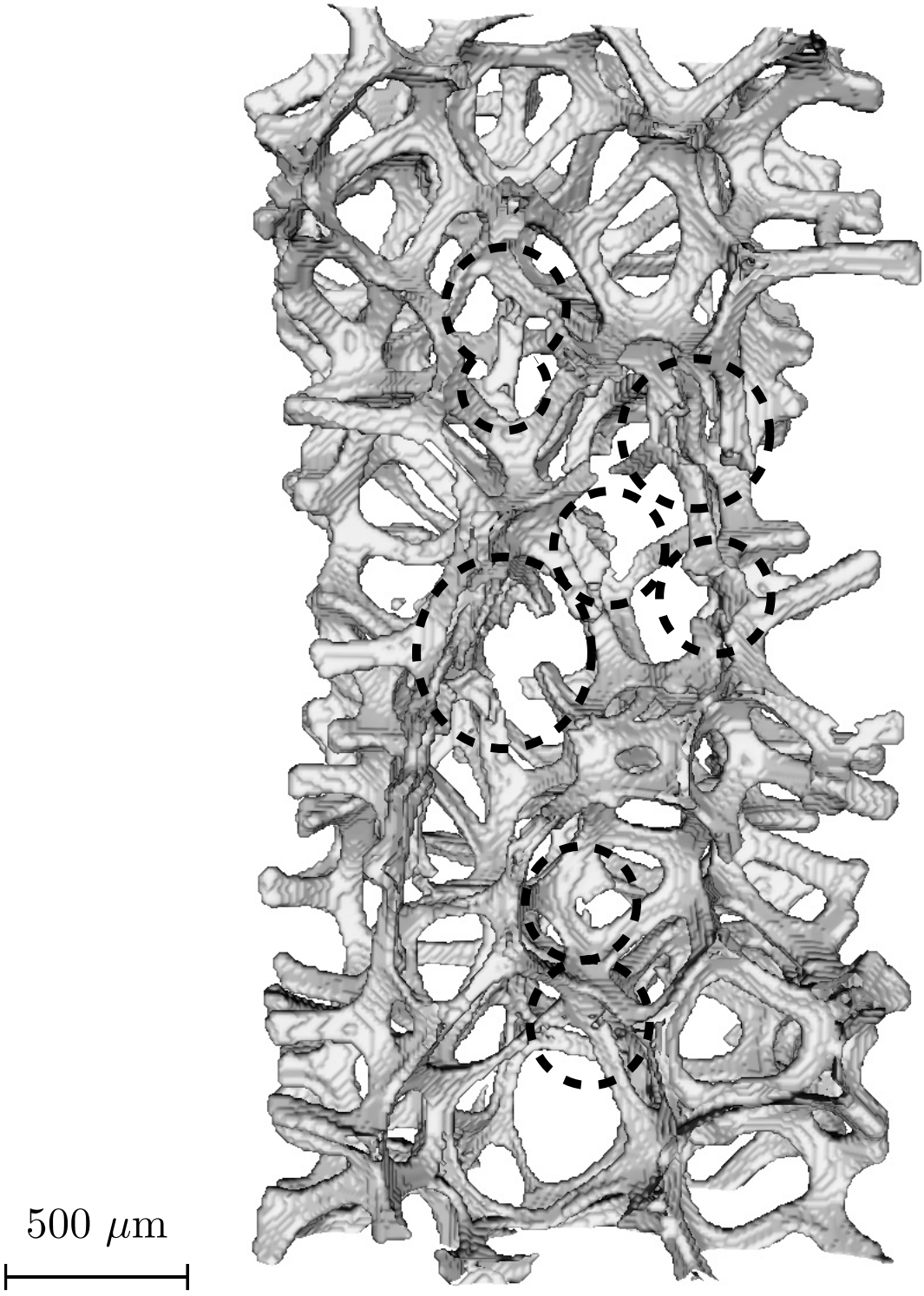



**Figure I.36** : Characteristic length of fracture area.

with the tensile direction, the strut undergoes pure tension. It is harder to deform the strut than during bending. So, another strut can break and the crack can propagate even though the strut is still hung. That is why the crack area extends over five cells.

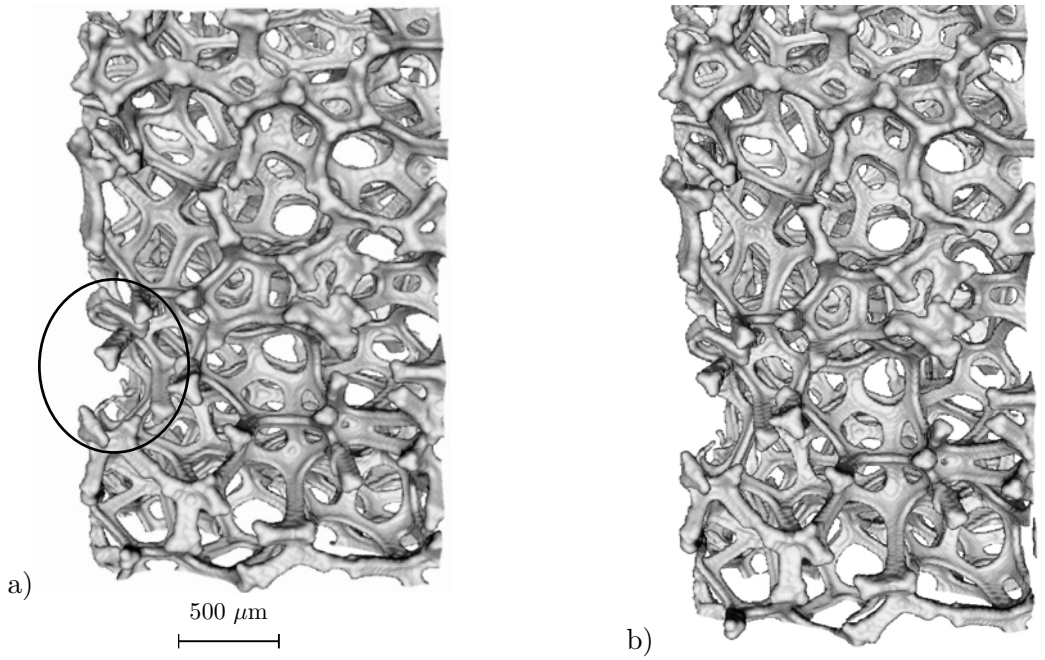



**Figure I.37** : Free edge effect – lateral boundaries : a) TD0 scan, b) TD2 scan.

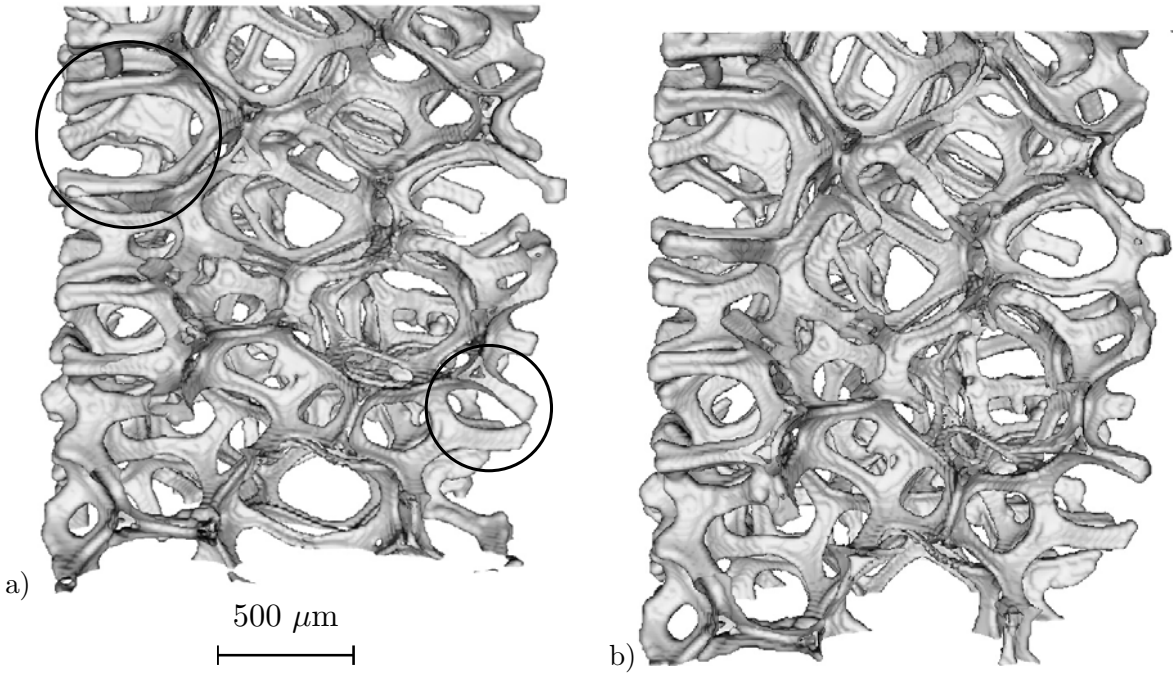



**Figure I.38** : Free edge effect – lateral boundaries : a) TD0 scan, b) TD2 scan.

## I.6 Conclusion and suggestions for future work

In this work, it has been shown that X-ray microtomography, at a sufficiently fine resolution, is a well-suited technique to study the mechanical behaviour and cracking of open-cell nickel foams. The time when and the place where a crack starts can be detected by this technique.

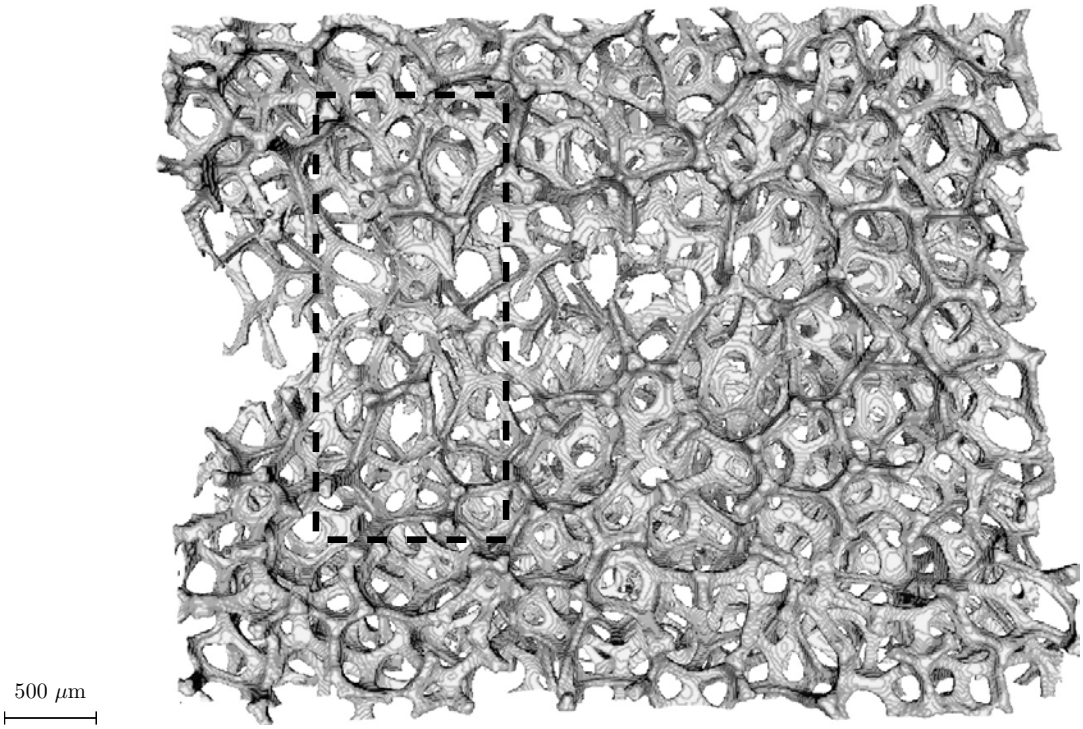



**Figure I.39** : Zoom at the fractured area.

The main deformation mechanisms are the following for tension and for compression tests :

- strut alignment and stretching in tension ;
- bending of the struts more or less parallel with the loading direction followed by strut buckling in compression.

Strong strain localisation is observed in compression whereas, in tension, deformation of nickel foams does not lead to significant localization phenomena before the initiation of a final crack.

The observations of the damage mechanisms in tension lead to the following comments :

- crack initiates at the lateral boundaries of the specimen ;
- fracture appears at nodes due to the rotation of the struts ;
- fracture is localized and the crack area is five cells wide ;
- crack propagation is cell by cell while some struts are still bridging the crack.

Moreover, X-ray microtomography gives 3D quantitative information on the initial morphology of the foam (MN 110-050-16) and during its evolution under loading. The main results of the initial stage are :

- average cell volume is 0.071 $mm^3$ ;
- average strut length is 190 $\mu$m ;
- average number of faces is 13 and one third of the cells are dodecahedra ;
- average number of sides is 5 and 57 % of the faces are pentagonal ;

– the most frequent cell in the foams is a dodecahedron with two quadrilaterals, two hexagons and eight pentagons.

One can note that no Kelvin tetrakaidecahedron and Weaire–Phelan structure are observed even if pentagonal dodecahedra and tetrakaidecahedra, that compose the Weaire–Phelan structure, are found in the foam.

Dimensions of the equivalent ellipsoid of each cell have been determined. The average equivalent ellipsoid measures 419 $\mu$m in the transverse direction, 520 $\mu$m in the coiling direction and 632 $\mu$m in the normal direction. This geometrical anisotropy, determined by X-ray microtomography, has been linked with the mechanical anisotropy.

In this work, the evolution of the shape of the cells during loading has been discussed in a global way. But, the parameters of the equivalent ellipsoid are computed for each cell. At each stage, the deformation of each cell can thus be quantified. These individual results bring two types of information. First, strain heterogeneities will be investigated thanks to this regionalization of the deformation. Secondly, it will be possible to detect the shape and the orientation of the cells that are most distorted.

A direction for future work can also be to use the 3D skeleton of the foam given by 3D image analysis (see figure I.4) to predict the mechanical behaviour of the foam (Elliott et al., 2002; Nieh et al., 1998; Shulmeister et al., 1998). The full three-dimensional beam network is ready to be implemented in a finite element codes for structural applications. The initial node-strut representation can be first implemented and deformation can be computed numerically. This work has been done by Arnaud Fazékas (Fazékas, 2003) for the elastic regime. These first calculations show that the anisotropy of the elastic properties are in agreement with the process directions. However, further calculations are required to better understand the difference between computed and experimental Young's moduli. A simulation in plasticity must be performed too and a comparison between the resulting macroscopic curve and the experimental one has to be carried out.

On the other hand, for different stages of deformation (where the scans take place), the beam network deformed numerically can be compared with the experimental one resulting from the 3D image analysis. This comparison can be made by correlation of nodes displacement. The finite element analysis must be performed first in tension. As stated in this work, deformation mechanisms are more adapted to beam network in tension than in compression. No strut buckling occur in tension. Moreover, 3D image analysis is not able to detect the struts in the densification regime and curved lines are not taken into account. And, to render the localisation phenomenon in the mid-thickness of the foam, struts with a lower density must be considered in foam core. Once mechanical behaviour is computed with a model beam network, the modelling of crack propagation, that requires the introduction of damage mechanisms, can then be studied. The results of the beam network calculations can also be compared with the result of some others meshing techniques (Maire et al., 2003; Ulrich et al., 1998). The three-dimensional images of the structure of the foam can provide meshes using the voxel conversion technique (brick elements) or the marching cube algorithm (tetrahedral element meshing).

**Acknowledgments**

The authors thank C. Lantuéjoul (Centre de Morphologie Mathématique, Ecole des Mines de Paris) for stimulating discussions about image analysis. They also acknowledge the European Synchrotron Radiation Facility for provision of synchrotron radiation facilities and especially the team of beamline ID19.

# Chapitre II

# Compléments sur la microstructure et l'endommagement des mousses de nickel

## Sommaire


**II.1 Méthode de segmentation tridimensionnelle : cas des mousses de nickel à cellules ouvertes . . . . . 48**

II.1.1 Segmentation des cellules . . . . . 48

II.1.2 Comparaison avec un autre algorithme de segmentation tridimensionnelle . . . 50

**II.2 Epaisseur des brins de nickel . . . . . 50**

II.2.1 Ligne de Partage des Eaux . . . . . 51

II.2.2 Granulométrie par ouverture . . . . . 54

II.2.3 Erreur commise sur la mesure de l'épaisseur . . . . . 54

**II.3 Surface réelle développée de la mousse de nickel . . . . . 55**

II.3.1 Technique expérimentale . . . . . 55

II.3.2 Synthèse des résultats obtenus pour les différents types de mousse . . . . . 56

**II.4 Mécanismes de rupture des mousses de nickel en traction . . . . . 57**

**II.5 Synthèse des principaux résultats de la première partie . . . . . 66**


Ce deuxième chapitre a pour but d'apporter des informations complémentaires à l'étude sous tomographie aux rayons X réalisée au chapitre I, et de finaliser la caractérisation microstructurale des mousses métalliques de nickel. Dans un premier temps, la méthode de segmentation tridimensionnelle, qui est à la base du développement et de l'exploitation des images issues du synchrotron, est reprise en détails et comparée à un autre algorithme de segmentation. Ensuite, l'épaisseur des brins est évaluée à l'aide d'une analyse d'images bidimensionnelles. La valeur du TDR (Thickness Deposit Ratio) est alors déduite de ces observations. Enfin, les mécanismes de rupture sont déterminés à l'aide d'essais de traction in-situ sous microscope électronique à balayage. Cette étude vient appuyer les observations déja réalisées au paragraphe I.5.4.

## II.1 Méthode de segmentation tridimensionnelle : cas des mousses de nickel à cellules ouvertes

En abordant l'analyse d'images, la première difficulté rencontrée concerne la segmentation des images. La terminologie "segmentation" définit la capacité à identifier et à séparer du fond les objets visibles sur une image. Une image tridimensionnelle est dite segmentée si chaque voxel peut être associé ou non aux objets de l'image. Comme expliqué précédemment, la segmentation tridimensionnelle des cellules de la mousse de nickel est la première étape indispensable avant de pouvoir caractériser complètement la forme des cellules. En effet, un simple modèle de granulométrie 3D par ouverture ne permet pas de déterminer la forme des cellules, mais conduit seulement à une information globale sur la taille des cellules. Afin d'établir un langage commun avec le lecteur, le vocabulaire employé, spécifique à l'analyse d'images, est défini en Annexe C.

### II.1.1 Segmentation des cellules

Les méthodes de segmentation sont nombreuses et variées : seuillage, gradient morphologique, ligne de partage des eaux (Meyer et Beucher, 1990). Cependant, certaines méthodes de segmentation, comme un simple seuillage, ne sont pas adaptées aux problèmes des mousses à cellules ouvertes puisque leurs contours ne sont pas définis. La matière des parois n'existant pas, il faut donc "l'inventer". Une méthode de segmentation par watershed a été adoptée pour séparer les cellules de la mousse de nickel les unes des autres.

L'algorithme de segmentation 3D peut être décomposé en trois étapes principales :

1. calcul de la fonction distance des cellules ;
2. calcul des minima locaux et conservation des marqueurs adéquats ;
3. établissement de la surface de partage des eaux.

Afin de mieux comprendre la méthodologie, les explications sont données dans le cas de traitement d'images 2D indépendantes. Le terme de ligne de partage des eaux (LPE) et non de surface est donc employé. De même, les images des figures II.1, II.2, II.3, montrent le résultat de l'analyse d'images 2D réalisée sur une section de la mousse. Toutefois, la segmentation des mousses a bien été effectuée en 3D en considérant simultanément trois sections de la mousse et les éléments structurants choisis sont bien des matrices (3x3x3) à 27 composantes.

Le calcul de la fonction distance s'effectue sur des images binaires. Les coupes successives, issues directement des essais de microtomographie aux rayons X, ont donc été préalablement seuillées (voir figure II.1a). Le résultat de la fonction distance sur une section 2D de la mousse est présenté sur la figure II.1b. La fonction distance est calculée à partir des cellules qui apparaissent en noir sur la figure II.1a. Le calcul de la fonction distance s'effectue donc sur le complémentaire des brins.

Sur la figure II.1b, chaque niveau de gris représente une distance entre les objets de l'image. Plus les voxels sont proches d'une frontière entre deux objets, plus ils ont un niveau de gris élevé et apparaissent avec une couleur claire. Les minima de la fonction distance ressortent donc en noir sur cette figure. Ils correspondent aux érodés ultimes de l'image (Lantuéjoul et Maisonneuve, 1984). Ils seront dénommés *marqueurs* dans la suite. Les minima locaux de la fonction distance sont extraits à partir de la méthode expliquée en Annexe C. L'image des marqueurs, obtenus à l'aide de la fonction distance, est donnée à la figure II.2a. Sur cette figure, les marqueurs apparaissent en blanc. On peut remarquer que ces marqueurs sont trop nombreux. En effet, des marqueurs sont présents à la frontière entre deux cellules et une série

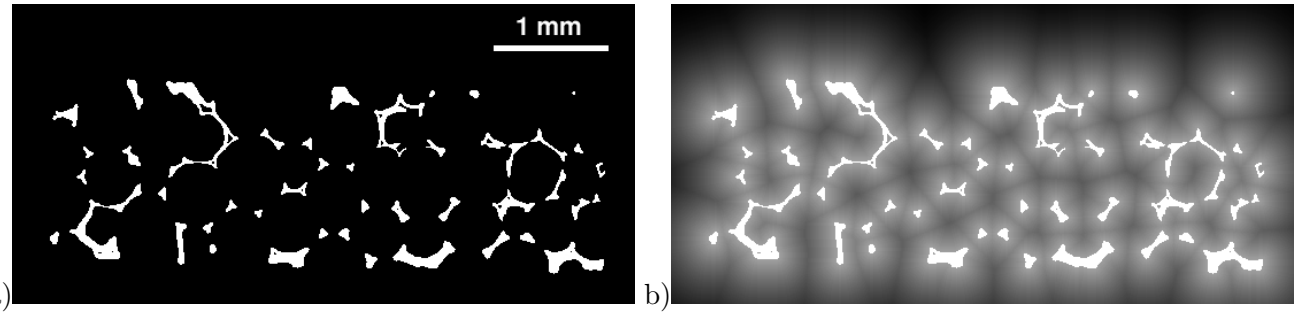



**Figure II.1** : Fonction distance sur une section 2D de la mousse : a) section 2D binarisée de la mousse, b) résultat de la fonction distance des cellules de la mousse.

de trois ou quatre marqueurs sont visibles à l'intérieur de certaines cellules. Or, un objet ne doit posséder qu'un et un seul marqueur. Sinon, lors de la construction de la ligne de partage des eaux à l'aide des résultats du calcul de la fonction distance, une sursegmentation des cellules apparaît (voir figure II.2b). S'il existe un seul marqueur par objet, la ligne de partage des eaux trouve une région par marqueur en suivant la ligne de crête. Le principal inconvénient de cette méthode, utilisant la LPE "brute" est qu'elle entraîne une sursegmentation des objets, puisqu'elle prend en considération tous les minima de la fonction distance.

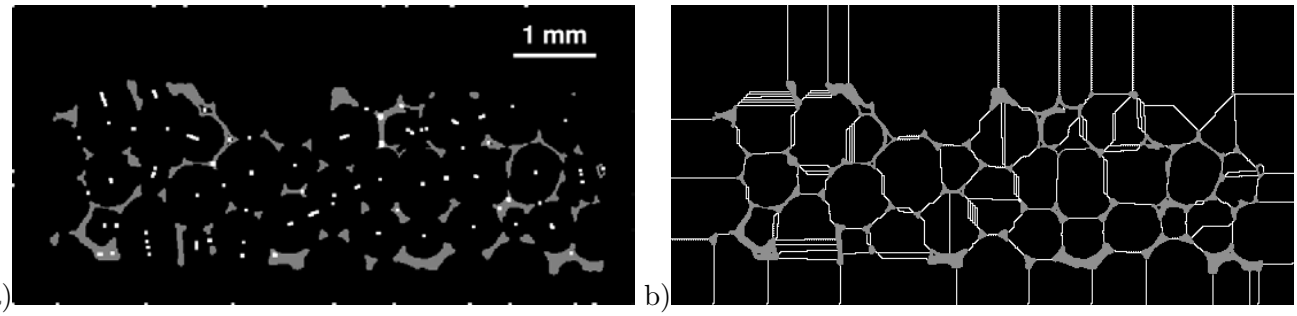



**Figure II.2** : Sursegmentation des cellules d'une section 2D de la mousse : a) image des marqueurs de la fonction distance des cellules, b) ligne de partage des eaux associée

Dans notre cas, la segmentation se résume donc à trouver les marqueurs adéquats. On peut remarquer que si le résultat désiré est précis, des marqueurs approximatifs suffisent. On pourrait même les définir à la main pour chaque cellule. Cependant, cette opération laborieuse, coûteuse en temps et non automatisable, n'est pas souhaitable. Il est donc nécessaire de discriminer les minima provenant du bruit. Un seuillage des minima n'est pas envisageable car la valeur seuil n'est définissable qu'arbitrairement. Cette méthode n'est donc pas reproductible. Afin de sélectionner les "bons" marqueurs, on s'intéresse à leur environnement. La convexité des cellules impliquent que les "bons" marqueurs doivent se retrouver au fond d'une vallée de forme "pointue". Pour chaque minimum, la différence entre son niveau de gris ($n^{min}$) et celui de ces 26 voisins ($n^{vois}$) est étudiée. Si cette différence est suffisamment importante alors le minimum est conservé.

Le résultat de cette sélection est visible sur la figure II.3a. Sur cette image, l'image des "bons" marqueurs a été légérement dilatée pour pouvoir les observer. Toutefois, dans la réalité, ces marqueurs sont constitués de plusieurs pixels.

A partir de l'emplacement de ces marqueurs, on remonte à la ligne de partage des eaux en se servant des résultats de la fonction distance déjà évaluée. Les minima de la fonction distance servent de marqueurs

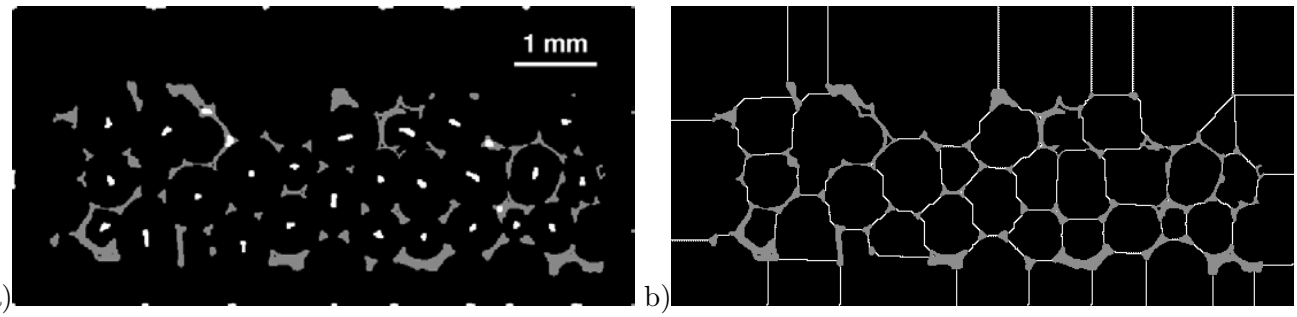



**Figure II.3** : Segmentation des cellules d'une section 2D de la mousse : a) image des "bons" marqueurs, b) ligne de partage des eaux associée.

d'objets à l'opérateur LPE. On effectue donc une reconstruction géodésique à partir de l'image des "bons" marqueurs pour aboutir à la segmentation des cellules. Le résultat de la segmentation des cellules associé à la reconstruction géodésique des "bons" marqueurs est donné sur la figure II.3b.

### II.1.2 Comparaison avec un autre algorithme de segmentation tridimensionnelle

Durant son stage de troisième année à l'Ecole des Mines de Paris et au synchrotron de Grenoble, S. Bouchet a étudié différents matériaux poreux dont les mousses à cellules ouvertes et a proposé un algorithme pour les segmenter (Bouchet, 1999). Cette méthode a même été employée pour segmenter des mousses de polyuréthanne par Elliott et al. (Elliott et al., 2002). La première phase de l'algorithme de Bouchet est la même que celle explicitée précédemment. Cependant, après avoir calculé la fonction distance, il s'affranchit du problème de sursegmentation rencontré en choisissant de dilater les maxima de la fonction distance. Il souhaite les fusionner pour ne conserver qu'un seul marqueur par cellule. La dilatation effectuée s'arrange pour conserver les petits pics de la fonction distance. Les petites cellules ne sont pas supprimées arbitrairement. L'image initiale ainsi que le résultat de la segmentation proposée par Bouchet sont visibles respectivement sur la figure II.4a et la figure II.4b. On peut constater qu'une sursegmentation est encore présente. Plusieurs petites cellules apparaissent alors qu'elles n'existent pas dans l'image initiale. A partir de l'image initiale (scannée directement sur le rapport de S. Bouchet), l'algorithme présenté au paragraphe précédent a été effectué. Son résultat de segmentation est proposé à la figure II.4c. On peut constater que dans le cas de notre algorithme, ces petites cellules n'apparaissent pas. La sursegmentation vient du fait que S. Bouchet garde les petites cellules après la dilatation. Mais, ce choix de les garder toutes est arbitraire. Sa méthode, qui donne de bons résultats, semble peu robuste et dépend beaucoup de la taille de l'élément structurant de la dilatation. Elle ne convient pas à tous les types de mousse. L'utilisation d'opérations morphologiques sur les marqueurs pour les sélectionner est à proscrire. En revanche, l'utilisation de considérations topographiques au voisinage des marqueurs semble mieux adaptée à la segmentation des mousses à cellules ouvertes.

*Remarque : les cellules fermées avec l'algorithme de Bouchet apparaissent plus sphériques. Cette différence s'explique par la différence de programmation de la propagation de la fonction distance.*

## II.2 Epaisseur des brins de nickel

Les résultats, issus de l'analyse d'images 3D, ne permettent pas de déduire l'épaisseur des brins de la mousse de nickel. En effet, les résolutions employées lors des essais de tomographie (2 et 10 $\mu$m) sont trop proches de l'épaisseur des brins. Afin de réduire l'erreur commise sur la détermination de l'épaisseur des brins à partir des images de tomographie sous la résolution 2 $\mu$m, une coupe plan polie au micron d'un échantillon de mousse, MNS 110-050-16, a été cartographiée, en microscopie électronique à balayage,

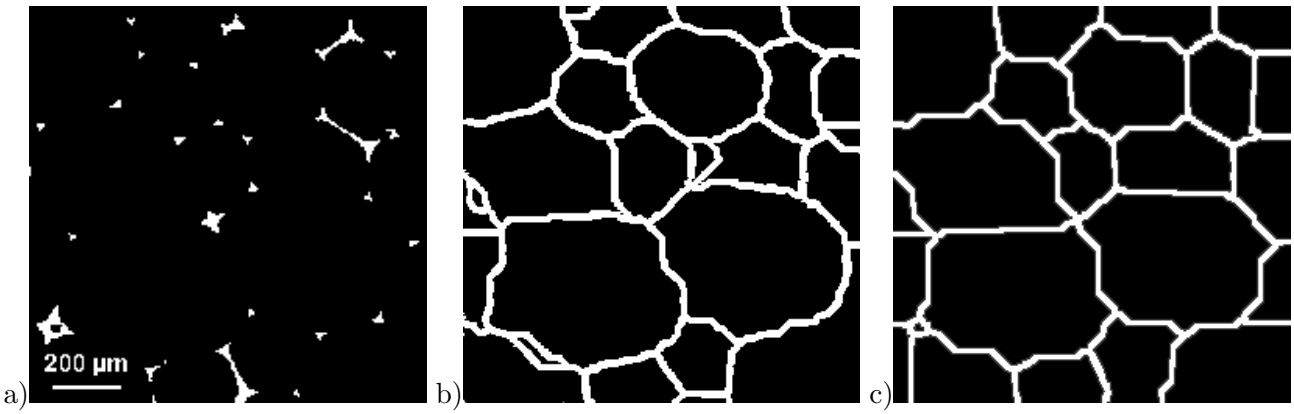



**Figure II.4** : Comparaison de l'algorithme de segmentation 3D des cellules : a) section 2D initiale de la mousse, b) algorithme proposé par S. Bouchet (Bouchet, 1999), c) algorithme proposé dans cette thèse.

avec une résolution plus fine. Le grossissement utilisé pour chaque image est x300 et correspond à une résolution de l'ordre de 0,73 $\mu$m par pixel (voir figure II.5b). Les images contiennent 1024x1024 pixels et sont à pixels carrés (pour les besoins de l'analyse d'images). La zone cartographiée s'étend sur 35 mm de long et 1,68 mm de haut. Le sens de défilement de la mousse, la direction RD, est perpendiculaire au plan de la coupe (voir figure II.5a). Le cercle sur la photographie II.5a indique la position de l'image à champs jointifs II.5b utilisée lors de l'analyse d'images.

Deux analyses d'images différentes ont été menées pour déterminer la distribution en taille des objets (ici, les brins) et pour connaître la répartition du nickel dans l'épaisseur de la mousse (TDR). La première méthode se sert des maxima de la fonction distance tandis que la deuxième est une méthode classique de granulométrie par ouverture.

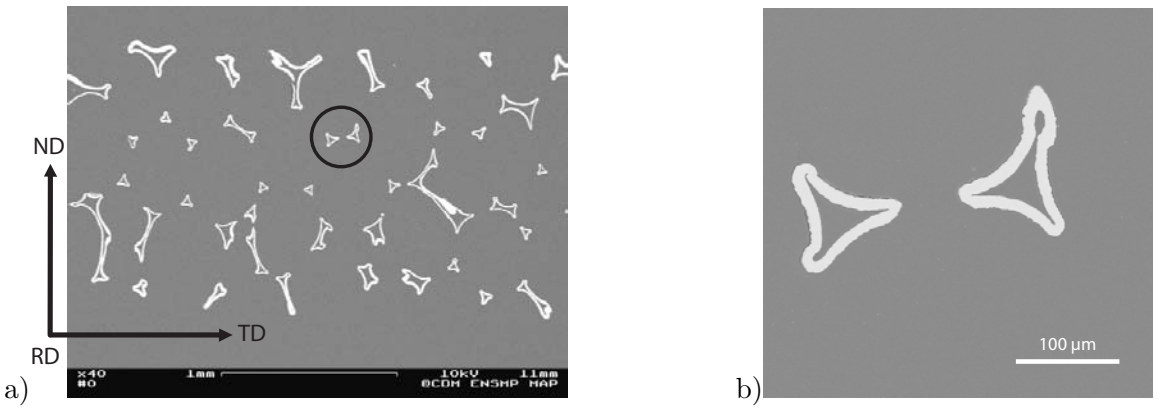



**Figure II.5** : Analyse d'images 2D : a) partie de la zone cartographiée, b) photographie utilisée pour l'analyse d'images bidimensionnelles.

### II.2.1 Ligne de Partage des Eaux

Comme nous venons de le voir, la ligne de partage des eaux est très souvent employée dans la segmentation d'images à niveaux de gris lors de problèmes de détection de contours. Ici, cette méthode permet de déterminer l'épaisseur des brins. Tout d'abord, un seuillage est réalisé afin de binariser les images en niveaux de gris issues du MEB. La fonction distance est ensuite calculée à partir des images binaires. Dans ce cas, la ligne de partage des eaux est alors simplement donnée par la position des maxima locaux,

extraits de l'image de la fonction distance. La détermination de l'épaisseur des brins à partir de cette ligne de plus grande intensité devient aisée. Il suffit de connaître le nombre d'érosions nécessaires pour atteindre cette ligne. Ce nombre équivaut à la demi-épaisseur du brin. Sur les photographies de la figure II.6, les brins de la mousse sont représentés ainsi que la ligne de partage des eaux. Il est à noter que cette ligne suit bien les méandres des brins et notamment leur forme en bordure de Plateau.

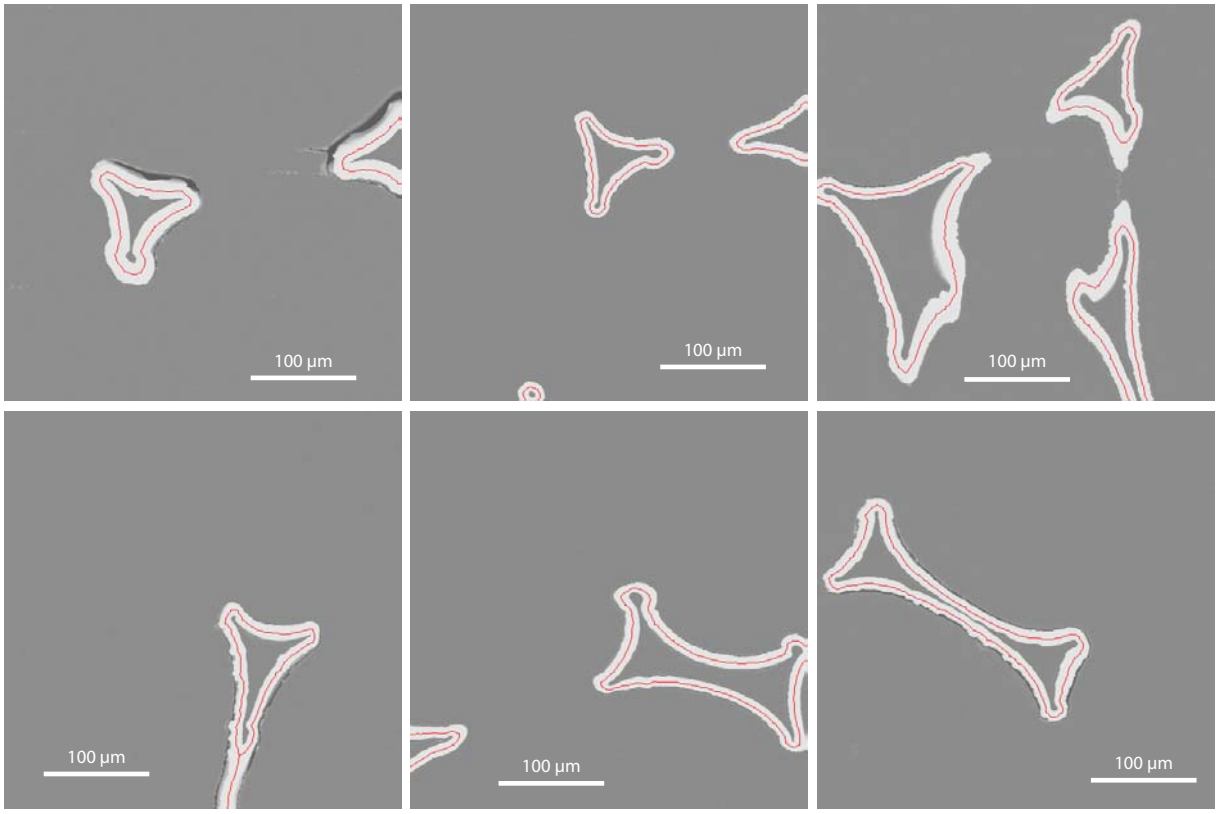



**Figure II.6** : Analyse d'images 2D : ligne de partage des eaux.

Grâce à cette méthode, un histogramme représentatif de la distribution en taille des brins de la mousse de nickel a été obtenu (voir figure II.7). Ce graphe fait la synthèse de toutes les informations obtenues sur toute la zone cartographiée. Deux populations de taille de brins peuvent être distinguées : l'une centrée sur 8 $\mu$m et l'autre sur 10-11 $\mu$m. En effet, compte tenu du TDR, la taille des brins n'est pas homogène dans l'épaisseur de la mousse. Les brins proches de la surface sont plus épais que ceux observés à cœur (voir figure II.8). A partir de la figure II.8, les images ont été scindées en deux groupes : celles appartenant au milieu de la mousse et celles aux bords. La délimitation entre ces deux zones a été fixée à 0,3 mm des deux bords.

En reprenant l'analyse d'images 2D pour ces deux régions, les deux graphes de la figure II.9 sont obtenus. L'épaisseur des brins situés sur les bords de la mousse est de 12-13 $\mu$m alors qu'elle n'est que de 8 $\mu$m pour les brins situés à cœur. Sur le graphe de la figure II.9a, on peut remarquer la présence d'un petit pic centré sur l'épaisseur 8 $\mu$m. Ce pic est dû à la prise en compte de brins de cœur dans le groupe des brins de surface de la mousse. Il aurait fallu redécouper les images situées à la frontière entre les deux zones qui comportent les deux catégories, pour avoir une meilleure précision sur la valeur du TDR.
Toutefois, une première valeur du TDR peut être avancée.

$$TDR = \frac{t_e}{t_i} = \frac{12,5}{8} = 1,56 \tag{II.1}$$

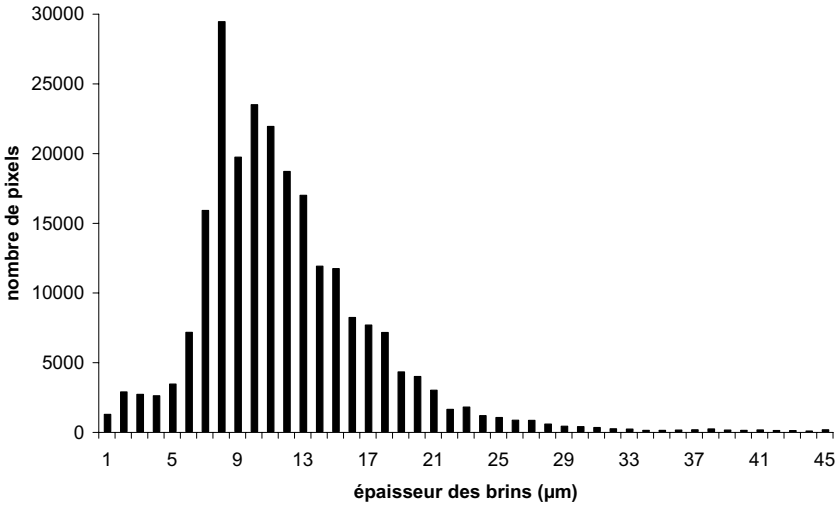



**Figure II.7** : Epaisseur de tous les brins de la mousse calculée à l'aide de la ligne de partage des eaux.

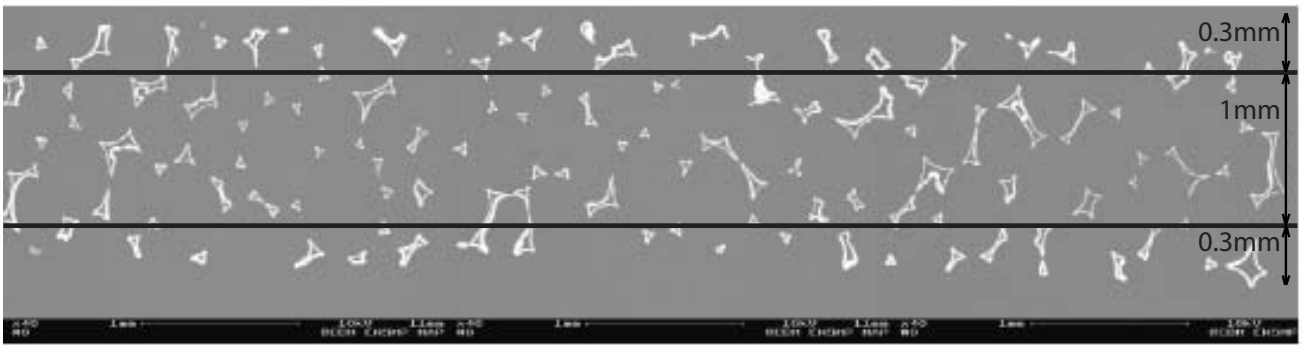



**Figure II.8** : Section des brins de la mousse – Partie de la zone cartographiée.

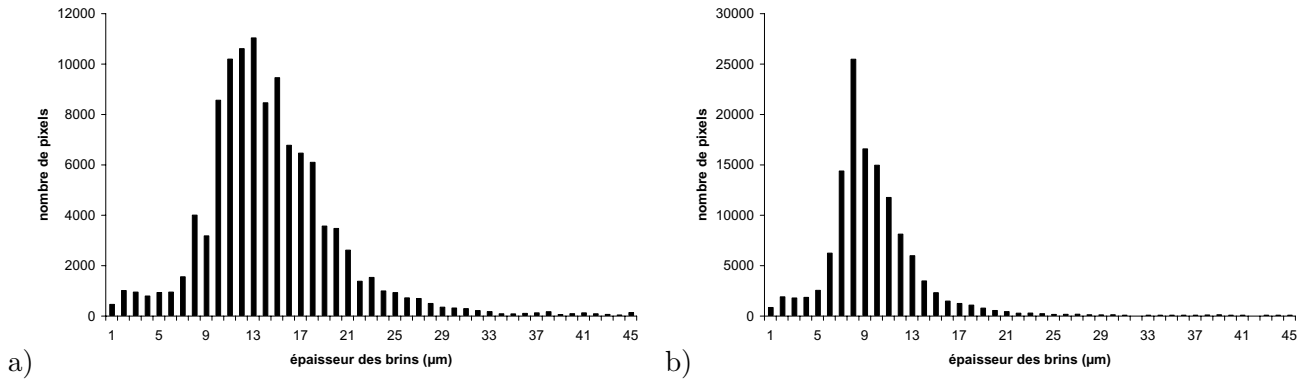



**Figure II.9** : Epaisseur des brins obtenue grâce à la ligne de partage des eaux : a) brins appartenant aux bords de la mousse, b) brins situés au cœur de la mousse.

### II.2.2 Granulométrie par ouverture

Une deuxième méthode a été utilisée pour déterminer l'épaisseur des brins de la mousse. Après le seuillage des images MEB, un modèle de granulométrie par ouverture est appliqué sur les images binaires. Ce modèle consiste à effectuer des ouvertures de taille croissante sur l'image. L'image binaire est alors érodée puis dilatée à partir de l'élément structurant $\mathbb{1}$ jusqu'à ce qu'il ne reste plus aucun pixel appartenant aux brins. Après chaque ouverture, le taux surfacique restant est comptabilisé. Le graphe représentant le taux surfacique en fonction de la taille des ouvertures peut alors être tracé. Les ruptures de pente de ce graphique (point d'inflexion de la dérivée de la fonction) signifie qu'une population d'objets ayant la même taille vient de disparaître. Cette méthode permet donc de connaître la distribution en taille d'amas de l'image.

Le même découpage en deux groupes, identique à celui du paragraphe II.2.1, a été réalisé. Les résultats obtenus pour les brins en surface de la mousse sont représentés sur le graphe de la figure II.10a, tandis que ceux obtenus pour les brins situés à cœur sont tracés sur la figure II.10b. L'épaisseur des brins situés sur les bords de la mousse est centrée autour de 11-12 $\mu$m tandis qu'elle est centrée autour de 7-8 $\mu$m pour les brins situés à cœur. La valeur du TDR résultant est la suivante :

$$TDR = \frac{t_e}{t_i} = \frac{11,5}{7,5} = 1,53 \tag{II.2}$$

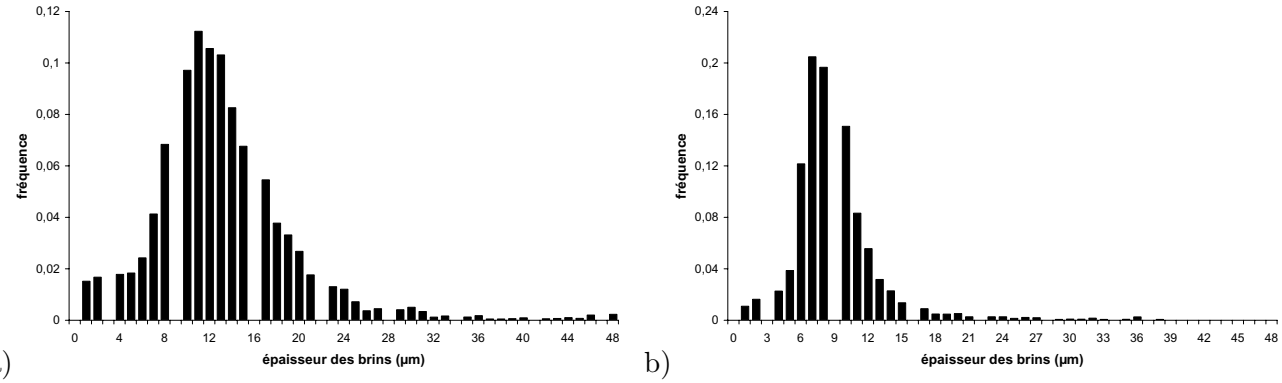



**Figure II.10** : Epaisseur des brins par granulométrie par ouverture : a) brins appartenant aux bords de la mousse, b) brins situés au cœur de la mousse.

### II.2.3 Erreur commise sur la mesure de l'épaisseur

Ces deux méthodes ont montré des résultats très similaires même si la philosophie entre les deux méthodes demeure différente. L'erreur induite par les méthodes d'analyse d'images ne semble donc pas trop élevée. Toutefois, plusieurs phénomènes conduisant à une erreur systématique ont été identifiés :

1. propreté des images et polissage des échantillons ;
2. prise de vue et déplacement automatique de la platine ;
3. inclinaison des brins ;
4. choix de l'élément structurant.

Comme dans toute analyse d'images, la propreté et la netteté des images MEB de départ sont essentielles pour obtenir un bon résultat. Une tache sur un brin ne donne pas le même niveau de gris. La tache peut être alors interprétée comme un trou à l'intérieur du brin. L'analyse d'images décèle deux brins de plus faible épaisseur au lieu d'un seul. Cet effet est montré à l'aide de la ligne de partage des eaux sur la figure II.11.

Pour obtenir les images MEB initiales, un polissage mécanique de la surface est indispensable. Afin de pouvoir polir la mousse, un enrobage de celle-ci est réalisé. Cependant, comme on peut le constater sur les figures II.11a et II.11b, la résine n'adhère pas parfaitement à la surface des brins en tout point. Ce manque d'adhérence a pour effet d'arrondir les brins et d'arracher des morceaux de nickel lors du polissage. L'épaisseur des brins en est alors diminuée.

Une autre remarque concerne l'acquisition des images MEB. La taille de la zone cartographiée étant très grande (35x1,68 $mm^2$) par rapport au grandissement souhaité (x300), le choix d'une acquisition automatique des images a donc été fait. Les objets se retrouvent donc non centrés et souvent tronqués par les bords de l'image. Un biais sur l'épaisseur des brins apparaît puisque l'image ne prend en compte qu'une partie du brin (voir figure II.11c et II.11d). Les objets touchant le bord n'ont pas été enlevés pour conserver une bonne statistique.

L'inclinaison des brins par rapport au plan de coupe n'a pas été prise en compte. Aucun facteur correctif n'a été appliqué aux résultats, ce qui suppose que l'orientation des brins interceptés est normale au plan de coupe. Les valeurs trouvées ont donc tendance à surestimer l'épaisseur des brins.

Enfin, le dernier problème met en jeu l'élément structurant employé dans la méthode de granulométrie par ouverture. La méthode de granulométrie par ouverture procède par comparaison à un élément structurant. Le résultat de l'ouverture est donc conditionné par la forme de cet élément structurant. La vitesse d'érosion de l'élément structurant $\mathbb{1}$ n'est pas isotrope. En assimilant le nombre d'itérations des opérations d'érosion avec la taille de l'objet, on commet donc une erreur. Cette erreur n'est pas présente dans le calcul de la fonction distance.

## II.3 Surface réelle développée de la mousse de nickel

Lorsqu'on s'intéresse aux caractéristiques géométriques de milieux poreux tel que celui des mousses, une question vient légitimement à l'esprit : "Quelle est la véritable surface développée par un parallélépipède rectangle de mousse de nickel de dimensions connues ?" Cette donnée géométrique importante de la structure des mousses n'est à priori pas immédiate. Ce paragraphe propose donc de donner une équivalence entre la surface réelle d'une mousse et celle d'un produit massif de même dimension géométrique. Pour répondre à cette question non triviale, une grandeur facilement mesurable et dépendant directement de la surface a dû être trouvée et exploitée. Les phénomènes d'oxydation nous sont apparus comme de bons candidats.

### II.3.1 Technique expérimentale

La technique expérimentale consiste à mesurer la prise de poids d'un échantillon de mousse par rapport à une référence lors d'un essai d'oxydation. Des échantillons rectangulaires de mousse et de feuillard de nickel ont donc été découpés. Les dimensions exactes de ces parallélépipèdes rectangles sont relevées à l'aide d'un pied à coulisse précis au centième de millimètre. Afin d'éliminer les saletés présentes en surface qui perturbent les phénomènes d'oxydation, un nettoyage des échantillons a été effectué. Ces derniers ont été placés dans un bac à ultra-sons, rincés à l'alcool et à l'acétone, puis séchés. Ce nettoyage méticuleux de la surface est une étape importante puisqu'il permet l'obtention d'une oxydation homogène sur tout l'échantillon et la comparaison des oxydations de surface. Toutefois, une préparation poussée

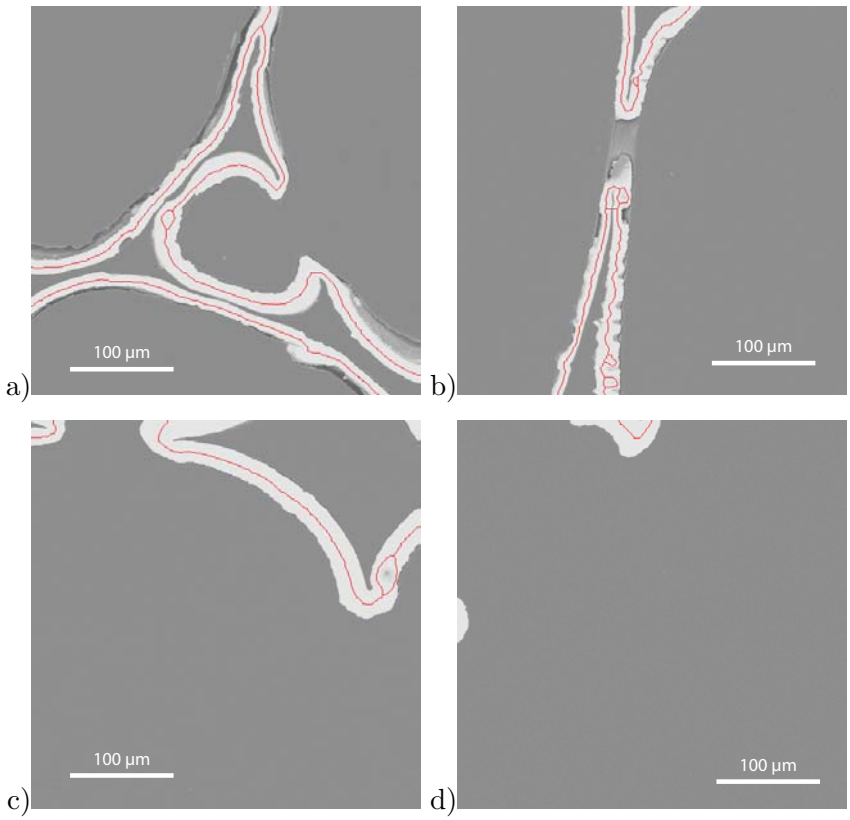



**Figure II.11** : Exemples d'erreur commise sur la mesure de l'épaisseur.

de la surface, telle qu'un décapage ionique pour éliminer la fine couche d'oxyde naturelle, n'a pas été réalisée. Les échantillons sont ensuite pesés à l'aide d'une balance électronique précise au centième de milligramme et placés côte à côte dans la zone homogène d'un four sous air. Ils subissent alors le même confinement, la même pression partielle et la même température lors du cycle thermique décrit par le four. A la fin du traitement thermique, la masse des échantillons est relevée et l'homogénéité des dépôts est observée au microscope électronique à balayage.

Tous les échantillons présentés ici ont subi le même cycle thermique : une montée à 20°C /min de la température ambiante jusqu'à 800°C , puis un palier de 30 minutes à 800°C et une descente à 20°C /min.

### II.3.2 Synthèse des résultats obtenus pour les différents types de mousse

Les résultats présentés dans le tableau II.1 sont obtenus à l'aide du même calcul que celui réalisé dans l'Annexe D. Les échantillons de feuillard de nickel utilisés ont tous la même épaisseur ($e = 0,125$ mm).

*Remarque : les chiffres entre parenthèses dans le tableau II.1 correspondent aux données des feuillards associés à chaque mousse lors des essais*

Les résultats du tableau II.1 montrent que le rapport $\eta$ et l'épaisseur des parois des brins sont respectivement des fonctions décroissante et croissante du grammage. Une mousse moins grammée développe une surface réelle plus grande. Toutefois, si l'on compare les valeurs du tableau II.1 entre elles, les données relatives à la mousse MN 110-050-16 semblent mal évaluées. En effet, aucune différence ne devrait être observée entre les mousses MN 110-050-16 et MNS 110-050-16. De plus, en prenant comme référence une épaisseur moyenne des brins de 8,5 $\mu$m pour la mousse de densité relative de 0,024 (MN 110-035-16) et en considérant que l'évolution de la densité relative se fait dans les mêmes proportions que celle de l'épaisseur moyenne des brins, on obtient le tableau II.2.

| Echantillons | Densité relative | L (mm) | l (mm) | $\Delta m$ (mg) | $\eta$ | $\bar{e}$ ($\mu$m) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| MN 110-035-16 | 0,024 | 60,6 (59,4) | 29,5 (16,5) | 85,5 (10,2) | 4,3 | 9 |
| | | 38 (38,5) | 28 (22,5) | 58 (9,4) | 4,6 | 8 |
| MN 110-042-16 | 0,029 | 60,2 (59,5) | 28,3 (14,7) | 85,6 (10,1) | 4 | 11 |
| | | 62,8 (63,1) | 21,2 (22,5) | 59,8 (13,2) | 4,4 | 9,8 |
| MN 110-050-16 | 0,035 | 60 (60,2) | 30,5 (16,4) | 78,7 (12,8) | 3,1 | 16,3 |
| | | 38,8 (40) | 29,9 (28,7) | 41,5 (12,3) | 3,1 | 16,7 |
| MNS 110-050-16 | 0,035 | 61,5 (54,8) | 30,4 (15,9) | 71,6 (7,5) | 4,2 | 12 |
| | | 43,6 (40,5) | 28,2 (30) | 56,3 (14,6) | 3,5 | 14,3 |
| MN 110-050-20 | 0,028 | 59,9 (59,9) | 28,4 (17,7) | 106,4 (10,7) | 5,6 | 9 |
| | | 46 (57,8) | 24,7 (22,5) | 73,9 (15) | 5,1 | 9,8 |

**Tableau II.1** : Surface développée réelle de la mousse et épaisseur moyenne des brins.

| Densité relative | 0,024 | 0,028 | 0,029 | 0,035 |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{e}_{estimé}$ ($\mu$m) | 8,5 | 9,9 | 10,3 | 12,4 |

**Tableau II.2** : Epaisseur moyenne estimée des brins de la mousse en prenant comme référence la mousse MN 110-035-16.

Toutes les valeurs du tableau II.2 sont en accord avec celles trouvées au tableau II.1, excepté pour la mousse MN 110-050-16. Ceci semble bien confirmer le fait que les valeurs données pour la mousse MN 110-050-16 dans le tableau II.1 sont surestimées.

On peut aussi constater que, dans le calcul du paragraphe D.1 de l'Annexe, le feuillard et la mousse sont supposés réagir de la même manière au cours de l'oxydation. Leurs cinétiques d'oxydation sont donc considérées comme identiques. Or, la vitesse de croissance des oxydes dépend notamment de la taille des grains et de leurs morphologies, des impuretés présentes dans le matériau ainsi que de la structure même des échantillons. L'oxydation d'un feuillard suit bien une loi parabolique en fonction du temps mais l'oxydation des mousses pour des épaisseurs d'oxydes non négligeables peut suivre des lois cinétiques quelque peu différentes à cause, par exemple, de la courbure moyenne des brins (Bartout, 2002). Les paramètres morphologiques des feuillards n'ont pas été étudiés.

Au cours du calcul, le dépôt de la couche d'oxyde est supposé homogène sur toute la surface. Les surfaces des échantillons oxydés ont donc été observées au MEB en électrons rétrodiffusés (contraste chimique). Les photographies II.12a-c proviennent de la mousse MNS 110-050-16. La couche d'oxyde varie entre 1,5 et 4 $\mu$m suivant l'emplacement des brins et le type de paroi (côté intérieur ou extérieur du brin).

En conclusion, les résultats issus des essais d'oxydation sur l'épaisseur moyenne des brins sont du même ordre de grandeur que ceux trouvés par analyse d'images 2D. Malgré toutes les approximations faites, il en résulte que les essais d'oxydation donnent des résultats intéressants.

## II.4 Mécanismes de rupture des mousses de nickel en traction

Les phénomènes de rupture ont déjà été abordés au paragraphe I.5.4. Toutefois, la résolution des essais de tomographie aux rayons X n'étant pas assez fine, les mécanismes de rupture à l'échelle du grain n'ont pas

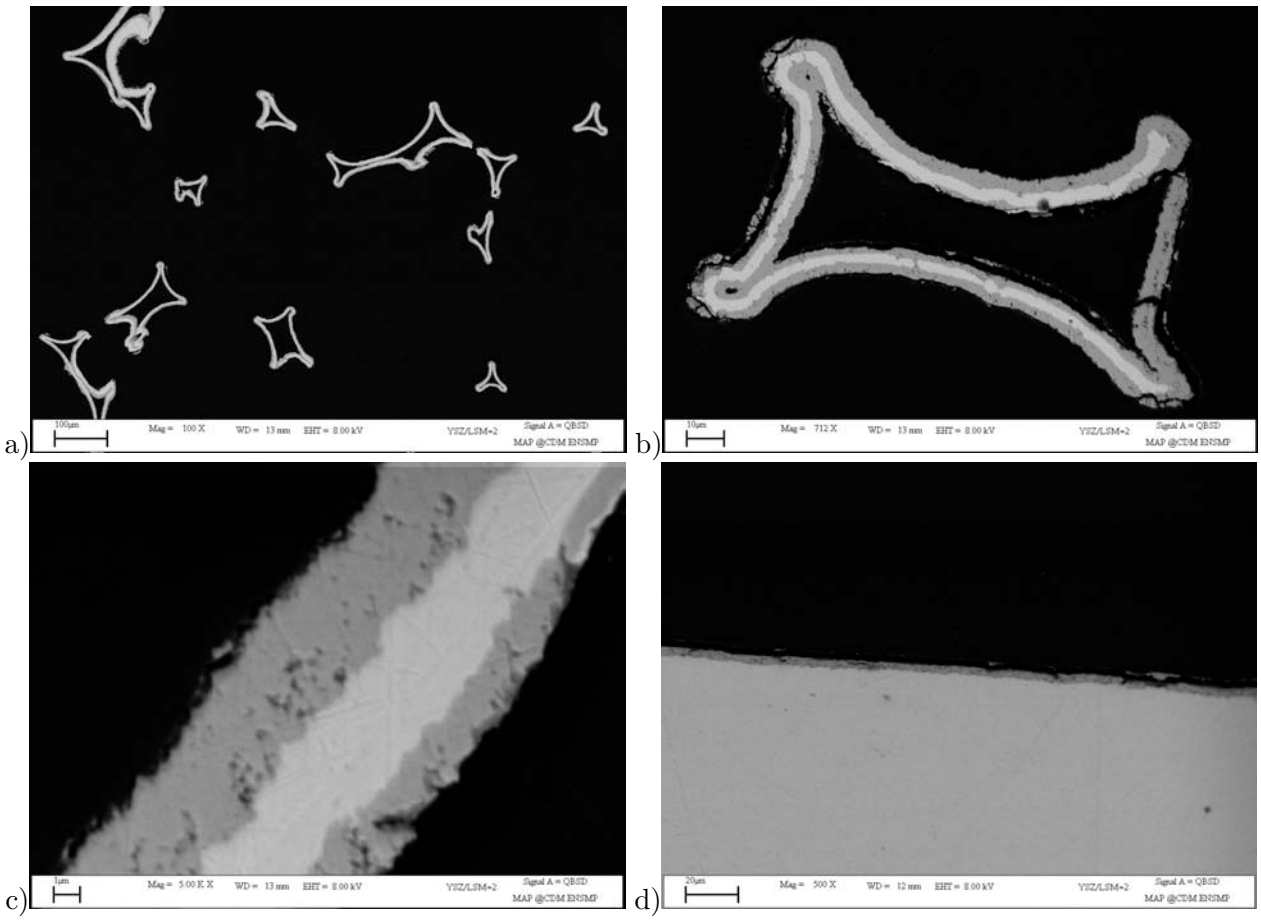



**Figure II.12** : Oxydation de la mousse (8 % en masse) et de son feuillard associé : a) vue générale de la mousse oxydée, b) brin de la mousse oxydée, c) paroi d'un brin de la mousse oxydée, d) feuillard oxydé.

pu être étudiés. Cette partie a donc pour but de répondre à un besoin industriel de première importance : est-il possible d'améliorer le comportement à rupture de la mousse ? Pour cela, le type de rupture doit d'abord être identifié.

Plusieurs campagnes d'essais de traction in-situ sous un microscope électronique à balayage ont été réalisées. Une petite platine de traction, comportant un seul mors mobile, est insérée dans l'enceinte du MEB. Les éprouvettes de mousse introduites sont généralement des bandes rectangulaires de 16 mm de long, 4,5 mm de large et 1,6 mm d'épaisseur. Une entaille de 1,5 mm de long est réalisée, à l'aide d'un cutter, sur un bord de l'éprouvette au milieu de la zone d'étude. Cette entaille permet de localiser la zone de rupture afin de faciliter l'observation sous MEB.

Les images MEB mettent en exergue le même comportement à rupture que celui qui a été dégagé des images tridimensionnelles obtenues par tomographie. En effet, comme il est visible sur la figure II.13, les phénomènes de rupture se produisent presqu'exclusivement aux noeuds. Cette rupture aux noeuds peut s'effectuer de deux manières : soit elle s'initie sur le bourrelet "extérieur", soit elle se produit sur la face diamétralement opposée au bourrelet "extérieur" à la manière d'une peau de banane (la rupture se propage parallèlement à l'axe de la poutre en suivant le bourrelet). Dans la suite, on reviendra sur ce phénomène de déchirure le long du bourrelet. La déchirure à partir du bourrelet et non le long de celui-ci est la plus importante.

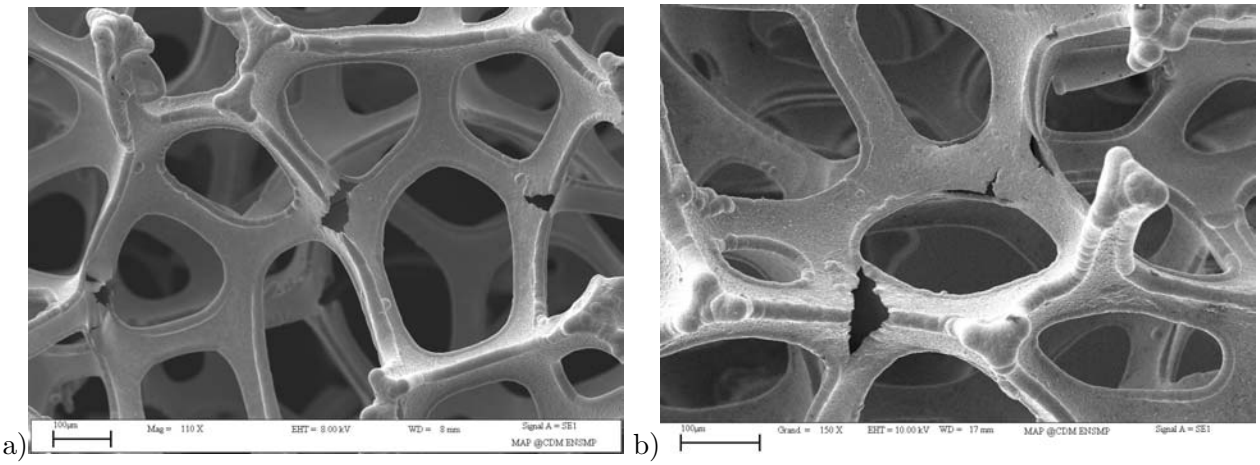



**Figure II.13** : Rupture au niveau des nœuds.

Si le brin est parfaitement aligné avec la direction de sollicitation et si ses extrémités ne sont pas amenées à modifier son alignement par rapport à l'axe de traction, le brin ne casse plus par flexion au niveau des nœuds mais par étirement au milieu du brin. Un exemple de ce phénomène est visible pour le brin repéré par une ellipse en pointillé sur la photographie II.14c. La figure II.14 représente quatre états de déformation de la zone utile de l'éprouvette. Elle permet d'avoir une idée de l'endommagement sur la globalité de l'éprouvette. Chaque image de cette figure est composée de quatre photographies MEB prises à un grandissement relativement faible. Cette figure permet de mettre en évidence l'existence de ligaments (entourés par des ellipses) et la taille de la zone d'endommagement. Malgré le faible grandissement des images, on peut quand même constater que des brins sont déchirés en dehors de la ligne de rupture. Les brins les plus extêmes sont repérés par des flèches pleines. La zone d'endommagement s'étend donc sur environ quatre cellules. On retrouve la taille donnée à partir des observations issus des images de tomographie aux rayons X.

A une échelle plus fine, deux modes de rupture sont visibles. Dans la plupart des cas, la mousse se déchire de manière ductile. On observe alors un amincissement du brin conduisant à une striction (voir figure II.15). Cette rupture intervient au milieu des grains et s'accompagne de petites dents (voir figure II.16). Cette rupture transgranulaire est liée à la faible épaisseur des brins ($\sim 10$ $\mu$m) et au fait que les brins ne contiennent généralement qu'un seul grain dans l'épaisseur. Au cours de la déformation, des dislocations se forment et émergent à la surface. On a donc une localisation de la déformation. Le grain est alors cisaillé et des dents apparaissent sur le faciès de rupture. Sur les figures II.17 et II.18, ces lignes de glissement sont visibles. La zone plastique s'étend sur environ deux grains latéralement et quatre grains dans le prolongement de la pointe de fissure (voir figure II.18). D'après l'étude de Robertson et Birnbaum sur des feuillards de nickel d'épaisseur 100 $\mu$m (Robertson et Birnbaum, 1986), l'avancée des fissures transgranulaires se produit soit par l'émission directe de dislocations à partir de l'extrémité de la fissure, soit par un mécanisme complexe de germination et de croissance d'une cavité en avant de la fissure. Ils précisent aussi que le faciès de rupture dentelé est dû aux phénomènes de glissement le long des plans cristallographiques {111} (plans denses de la structure CFC du nickel) qui intersectent la pointe de fissure.

Un moyen de limiter la rupture intergranulaire peut être d'augmenter l'épaisseur de nickel. Cependant, cette méthode est contraire à l'objectif industriel de cette thèse, qui vise à réduire les coûts de production en diminuant la quantité de nickel.

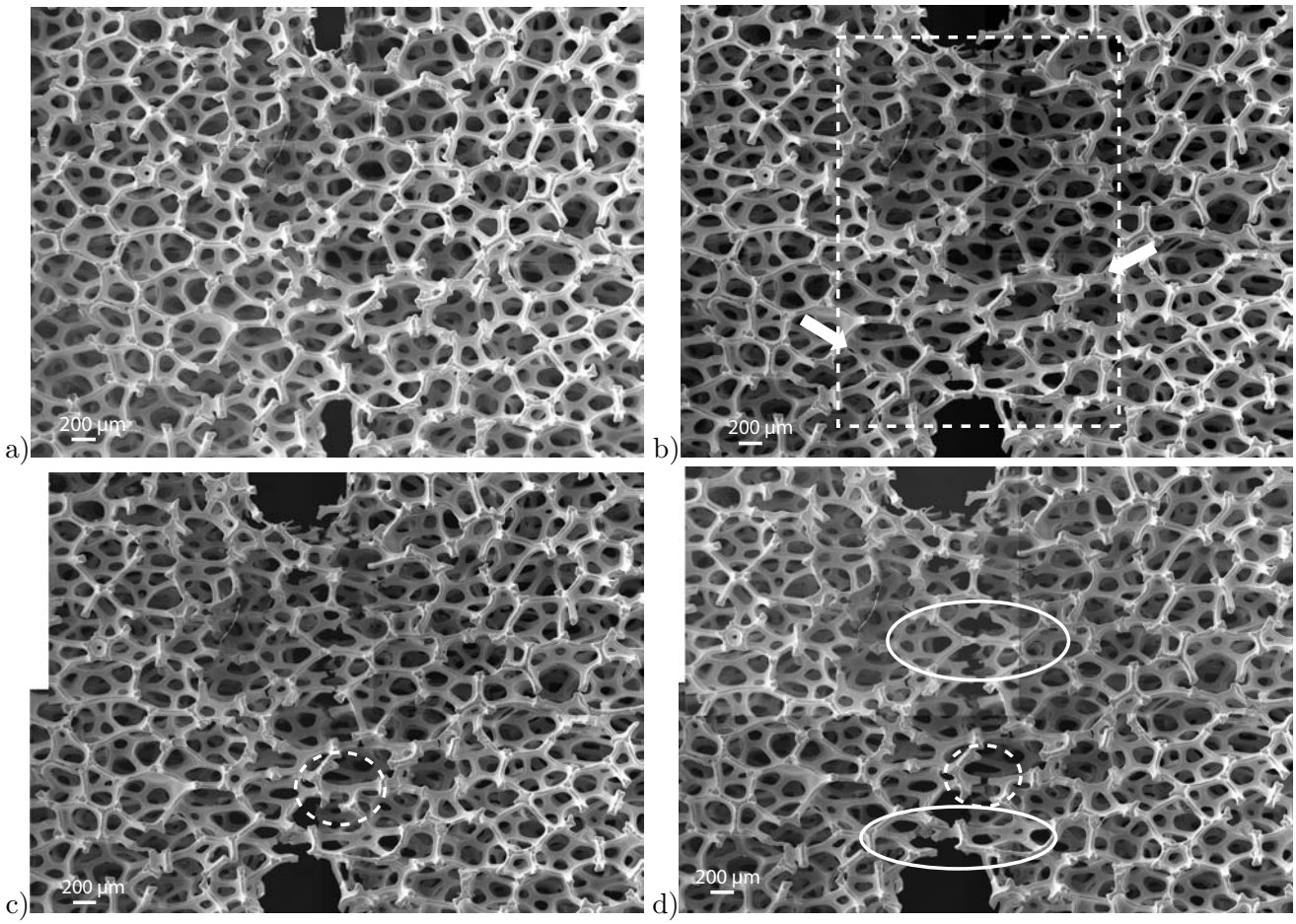



**Figure II.14** : Mécanismes de rupture – images MEB de la zone utile : a) état initial, b) 9,7 %, c) 12 %, d) 14 %.

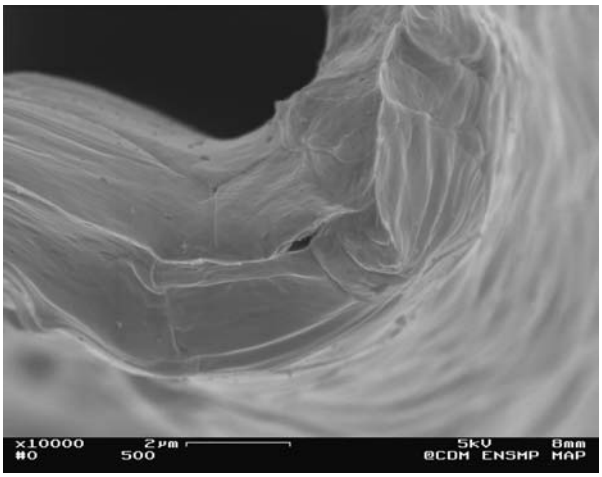



**Figure II.15** : Section d'un brin – Mise en évidence du phénomène de striction.

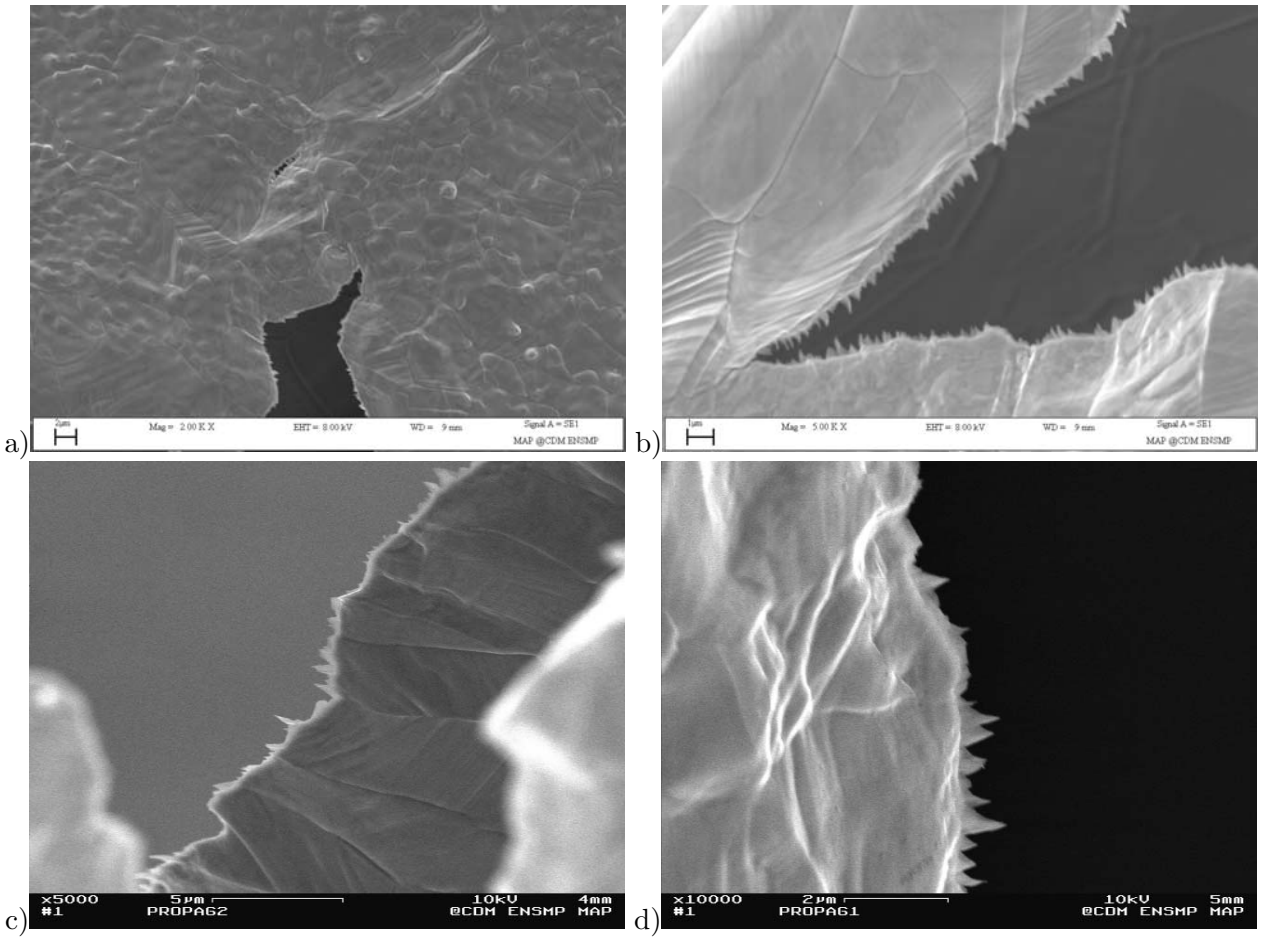



**Figure II.16** : Faciès de rupture transgranulaire.

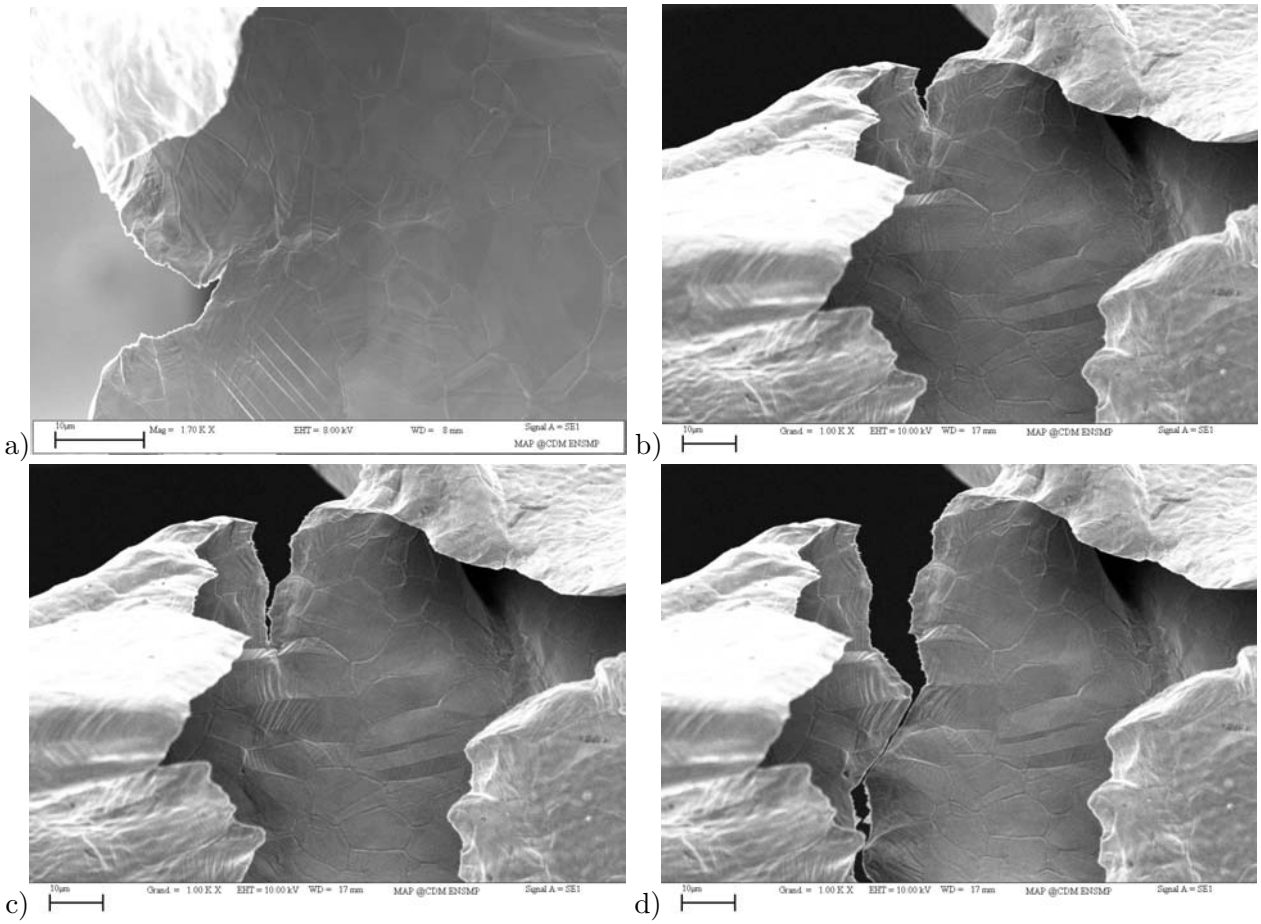



**Figure II.17** : Lignes de glissement en pointe de fissure.

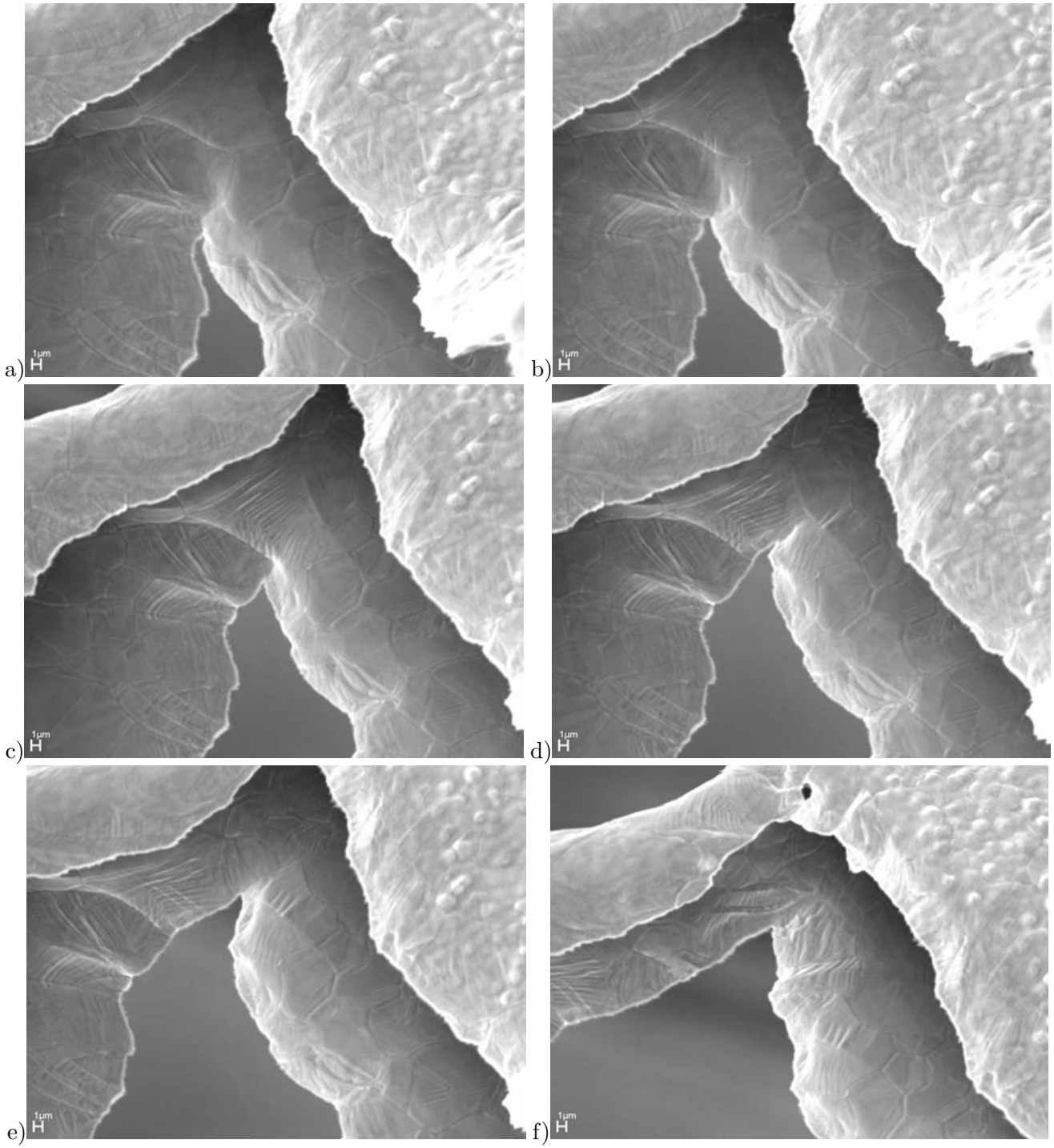



**Figure II.18** : Rupture transgranulaire – Propagation de la fissure.

Cependant, certains faciès de rupture ne présentent aucune dent (voir figure II.19). Leur surface est entièrement lisse. Ce phénomène se produit essentiellement à la jonction entre les bourrelets et le côté du brin. Cette liaison est fragilisée par l'effet du "thermal grooving" et par la rigidité plus importante du bourrelet (due à sa plus grande épaisseur). Le phénomène de "thermal grooving" peut être préjudiciable dans le cas de notre structure "bambou" où un seul grain est dans l'épaisseur. La rupture intergranulaire est aussi favorisée dans les zones à petits grains. La figure II.20 montre une rupture intergranulaire dans

une zone à petits grains qui devient transgranulaire lorsque la taille des grains augmente. Au cours de la déformation de la mousse, la formation de petites cavités au niveau des joints triples est observée. Les mêmes mécanismes de déformation ont été observés pour du nickel nanocristallin électrodéposé (Kumar et al., 2003).

On peut remarquer, sur les photographies MEB, que les joints de grain sont bien marqués à l'intérieur des brins. Sur leur face externe, une fine couche d'oxyde masque un peu les joints de grain. L'atmosphère, qui régne à l'intérieur des brins, est donc plus réductrice. L'atmosphère gazeuse à l'intérieur des brins est modifiée par les produits de la dégradation de la mousse de polyuréthanne.

Une étude quantitative sur la proportion de rupture trans-/inter-granulaire a été menée. 0,5 mm de fissure ont été observés et classés suivant l'état de surface du faciès de rupture. Si ce dernier présentait une surface lisse (resp. dentelée), la rupture était considérée comme intergranulaire (transgranulaire). Il en ressort que la rupture transgranulaire est majoritaire. Elle représente 70 % des cas. Les impuretés, telles que le soufre ou l'hydrogène qui ségrègent aux joints de grain et les fragilisent, ne semblent donc pas être la principale cause de rupture des mousses de nickel de la société NiTECH.

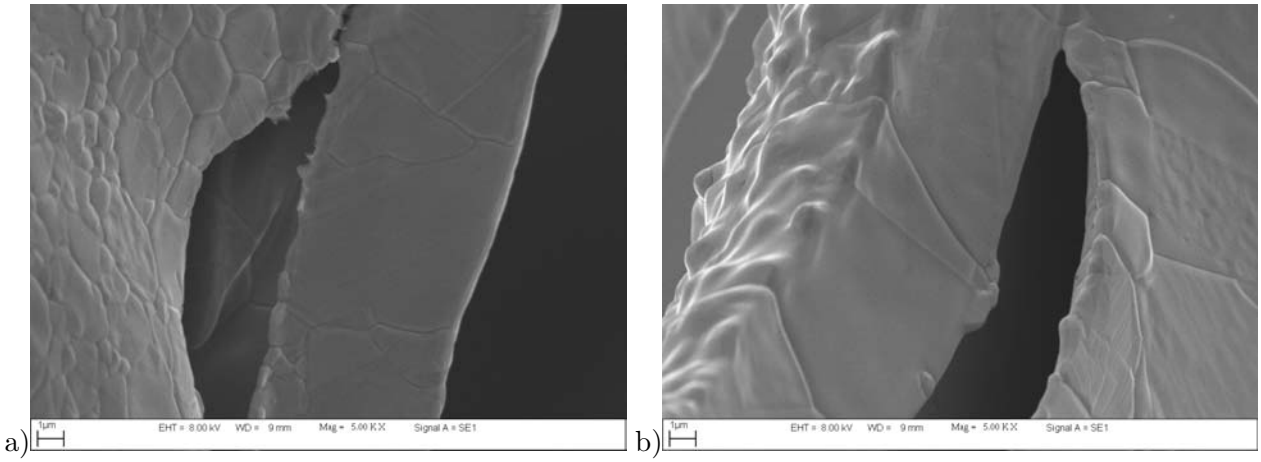



**Figure II.19** : Faciès de rupture intergranulaire.

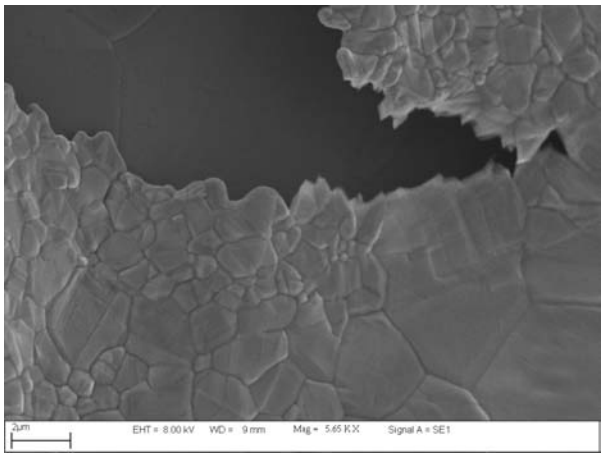



**Figure II.20** : Rupture mixte : mélange de rupture transgranulaire et intergranulaire.

L'analyse des mécanismes de rupture sous MEB a aussi permis de mettre en évidence des défauts présents dans la mousse (voir figure II.21). Ces défauts sont peu nombreux. Toutefois, ils peuvent fournir une explication à la manière dont s'échappe le polyuréthanne au cours de la pyrolyse. En effet, au cours de l'électrolyse, les brins situés aux extrémités de la mousse sont bouchés par le nickel. Le polyuréthanne ne peut donc pas sortir. Deux hypothèses peuvent alors être avancées : soit le dépôt de nickel n'est pas assez jointif et peut se soulever pour laisser échapper le gaz (le dépôt de nickel est ensuite consolidé lors du traitement thermique de recuit), soit le gaz s'accumule à l'intérieur des brins créant une surpression capable de faire exploser le brin. Les images de la figure II.21 semblent être en faveur de cette deuxième hypothèse.

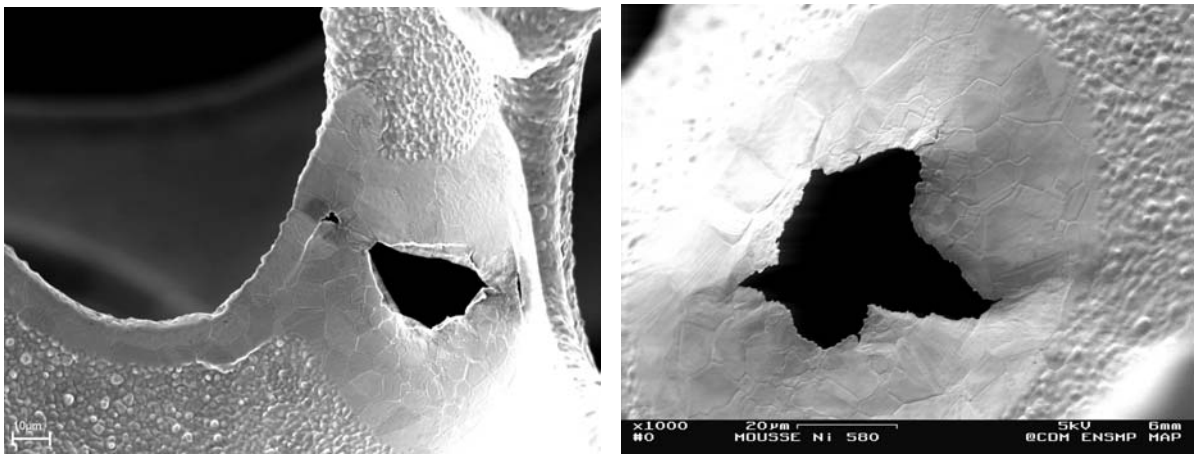



**Figure II.21** : Défauts présents dans la mousse.

## II.5 Synthèse des principaux résultats de la première partie

Les principaux résultats de cette première partie sont résumés sous forme de tableaux. Trois aspects ont été abordés :

- la morphologie initiale de la mousse de nickel ;
- les mécanismes de déformation ;
- les mécanismes d'endommagement sous diverses sollicitations.

**Morphologie initiale des mousses de nickel – MN 110-050-16**

| | |
|---|---|
| Longueur moyenne des brins | 190 $\mu$m |
| Epaisseur moyenne du dépôt de nickel<br>– à cœur<br>– en surface | <br>8 $\mu$m<br>11 $\mu$m |
| Volume moyen des cellules | 0,071 mm$^3$ |
| Surface développée de la mousse (par rapport à un milieu massif) | $\sim 4$ |
| Longueurs moyennes des axes des ellipsoïdes équivalents<br>– suivant la direction TD<br>– suivant la direction RD<br>– suivant la direction ND | <br>420 $\mu$m<br>520 $\mu$m<br>630 $\mu$m |
| Nombre moyen de faces par cellule | 13 |
| Nombre moyen de côtés par face | 5 |
| Cellule la plus présente dans la mousse | dodécahèdre<br>- 2 quadrilatères<br>- 8 pentagones<br>- 2 hexagones |

**Mécanismes de déformation**

| | |
|---|---|
| Traction | - alignement et étirement des brins<br>*pas de localisation significative de la déformation avant l'initiation de la fissure conduisant à la rupture finale* |
| Compression<br>– $1^{er}$ stade<br><br>– $2^{ème}$ stade | <br>- flexion des brins pratiquement alignés avec la direction de chargement<br>- flambage de ces brins<br>*localisation importante de la déformation à cœur* |

**Rupture des mousses en traction**

| | |
|---|---|
| Initiation | sur les bords de l'échantillon |
| Localisation | aux nœuds de la mousse |
| Taille de la zone endommagée | - sphère de 5 cellules de diamètre<br>*peu d'endommagement diffus* |
| Type de rupture | rupture mixte<br>- 70 % transgranulaire<br>- 30 % intergranulaire |
| Etendue de la zone plastique lors de la déchirure d'un brin | $\sim$ 4 grains |
| Propagation | - cellule par cellule<br>*observations de ligaments* |

## Partie B

# COMPORTEMENT EN TRACTION DES MOUSSES DE NICKEL ET DES MOUSSES REVETUES

Cette deuxième partie a pour but de présenter un modèle analytique simple, permettant de prévoir le comportement uniaxial en traction d'une mousse à cellules ouvertes. La démarche adoptée ici consiste à modéliser le comportement mécanique de la mousse de nickel au moyen du comportement du nickel et du mécanisme principal de déformation des mousses, identifié à l'occasion de la partie A. L'objectif du modèle analytique revient donc à établir si la non linéarité du comportement des brins en flexion suffit à expliquer la non linéarité observée sur le comportement de la mousse.

Avant de mettre en œuvre le développement du modèle, une étude expérimentale est réalisée. Cette première approche porte sur le comportement de trois mousses de même épaisseur et de même taille de pore, mais de grammage différent. Ces essais ont recours à un extensomètre "traditionnel" puisque seul le comportement macroscopique global uniaxial ($\sigma$ ; $\varepsilon$) de la mousse est analysé ici. La finalité de cette étape se résume à déterminer en fonction de la densité relative les lois d'évolution des grandeurs caractéristiques de la mousse, telles que le module de Young, le module plastique et la limite d'élasticité.

Cette base expérimentale sert, dans un second temps, à l'identification des coefficients du modèle analytique, qui se décompose en trois phases :

- étude du comportement d'un brin ;
- extrapolation au comportement de la mousse ;
- application éventuelle du modèle à un cas concret.

Les comportements élastique et élastoplastique du nickel sont étudiés successivement. Ensuite, un modèle à deux phases est développé pour répondre à l'étude du comportement des mousses revêtues.

*Remarque : d'un point de vue industriel, un modèle analytique à n-phases ($n > 2$) n'est pas très utile dans le cas des mousses. De plus, le nombre de cas à envisager se multiplie rapidement lorsque les phases possèdent un comportement élastoplastique. Pour répondre à de telles exigences, le comportement du brin est modélisé au moyen d'un calcul numérique.*

# Chapitre III

# Essais mécaniques – Traction uniaxiale des mousses de nickel à cellules ouvertes

**Sommaire**


**III.1 Anisotropie mécanique des mousses de nickel . . . . . 73**
III.1.1 Comportement mécanique des mousses de nickel en fonction du grammage . . . 73
III.1.2 Module de Young $E^*$ de la mousse . . . . . 74
III.1.3 Module plastique $H^*$ de la mousse . . . . . 79
III.1.4 Limite d'élasticité $\sigma_0^*$ de la mousse . . . . . 81
**III.2 Dispersion des essais mécaniques . . . . . 83**
III.2.1 Dispersion sur le comportement mécanique . . . . . 83
III.2.2 Dispersion sur le comportement à rupture . . . . . 84
**III.3 Influence de la vitesse sur le comportement mécanique . . . . . 84**
**III.4 Etude du comportement mécanique d'un feuillard de nickel . . . . . 86**


## III.1 Anisotropie mécanique des mousses de nickel

### III.1.1 Comportement mécanique des mousses de nickel en fonction du grammage

Le comportement mécanique des mousses de nickel a été étudié en fonction du grammage de la mousse. La figure III.1 représente la réponse mécanique des mousses lors d'un essai de traction monotone suivant la direction RD ou TD. Les courbes sont tracées pour trois types de mousse : MN 110-035-16, MN 110-042-16 et MN 110-050-16. Tous les échantillons ont été prélevés en zone Nord de la mousse.

Sur la figure III.1, une anisotropie du comportement mécanique peut être relevée dans tous les secteurs de la courbe, quel que soit le grammage. Le module de Young, le module plastique et la déformation/contrainte à rupture diffèrent en fonction du grammage. Lors d'un essai de traction effectué parallèlement à la direction RD de défilement de la mousse MN 110-042-16, la rupture se situe autour de 7 % de déformation. Cette rupture avoisine 16 % lorsque la sollicitation se fait suivant la direction transverse TD de la mousse. La même tendance est observée pour la contrainte à rupture. L'anisotropie des modules de Young et plastique ainsi que celle de la limite d'élasticité en fonction du grammage est étudiée dans les paragraphes suivants.

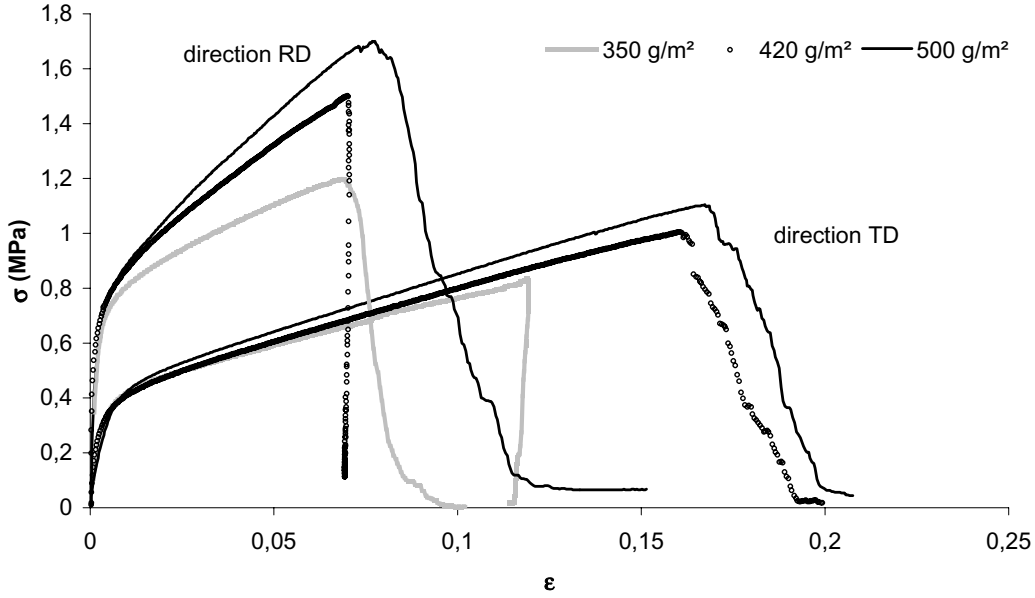



**Figure III.1** : Comportement mécanique des mousses de nickel en fonction du grammage et de la direction de sollicitation.

La figure III.1 montre aussi qu'à contrainte fixée, la mousse la moins grammée est celle qui se déforme le plus. Les déformations/contraintes à rupture apparaissent comme des fonctions croissantes du grammage. Plus l'épaisseur de nickel est importante, plus la mousse se déforme, et plus son seuil de contrainte à rupture est élevé. Cette tendance n'est pas toujours bien marquée sur la figure III.1 car le phénomène de dispersion du comportement mécanique des mousses tend à être prédominant.

### III.1.2 Module de Young $E^*$ de la mousse

Des essais de traction uniaxiale ont été réalisés sur des mousses de nickel à cellules ouvertes de différents grammages : 350, 420 et 500 g/m². Les mousses utilisées sont les suivantes : MN 110-035-16, MN 110-042-16 et MN 110-050-16. Les valeurs des grammages ont été vérifiées par pesée sur des plaques de grandes dimensions (1 m × 30 cm) afin de minimiser les erreurs de mesure (voir tableau III.1). L'épaisseur a été mesurée à l'aide d'un palmer électronique ainsi que d'un pied à coulisse. Les valeurs du tableau III.1 semblent indiquer que ce n'est pas la même mousse de polyuréthanne qui a servi à l'obtention de la mousse MN 110-035-16.

| Type de mousse | Etat | Surface (m²) | Masse (g) | Grammage mesuré (g/m²) | ΔGrammage (g/m²) |
|---|---|---|---|---|---|
| MN 110-035-16 | électrolyse | 1,07 × 0,31 | 137 | 410 | 61 |
| | recuit | 1,19 × 0,31 | 129 | 349 | |
| MN 110-042-16 | électrolyse | 1,19 × 0,31 | 174 | 472 | 50 |
| | recuit | 1,16 × 0,31 | 153 | 422 | |
| MN 110-050-16 | électrolyse | 1,06 × 0,31 | 182 | 549 | 49 |
| | recuit | 1,15 × 0,31 | 178 | 500 | |

**Tableau III.1** : Différence de masse entre l'état en sorti d'électrolyse et après recuit.

Dans un premier temps, plusieurs charges et décharges successives ont été réalisées tout au long de l'essai pour voir si une évolution de la valeur du module de Young existe en fonction de la déformation (voir figure III.2). En effet, un alignement des brins de la mousse avec la direction de traction doit conduire à un module de Young plus élevé. La forme des cellules changent et moins de poutre en flexion demeurent. De plus, il est aussi probable d'enregistrer une baisse du module de Young au cours de la déformation provenant de l'endommagement de la structure.

Toutefois, la mesure de la déformation sur toute la courbe (de 0 à 16 %) nécessite l'emploi d'un capteur dont la course est suffisante. Un capteur potentiométrique de 7 cm d'allongement avec une longueur de jauge initiale de 70 mm a donc été utilisé pour produire la figure III.2.

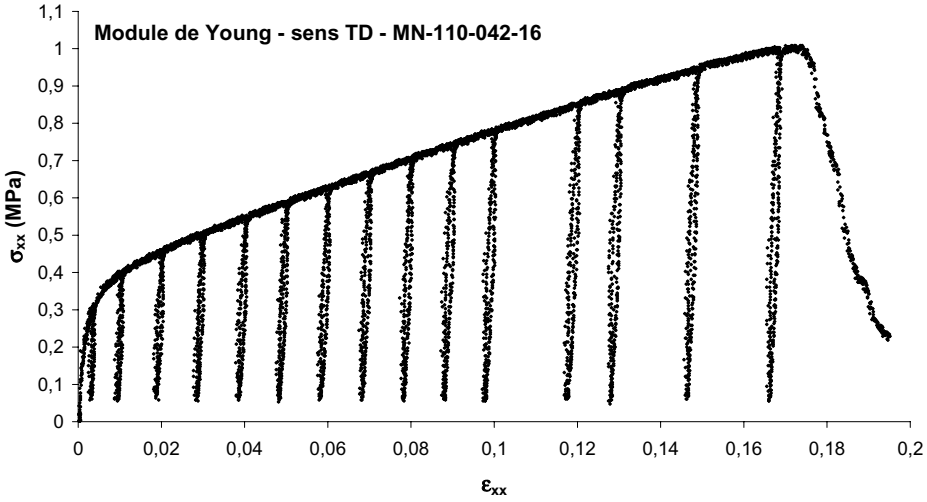



**Figure III.2** : Essai de traction - Charges et décharges successives.

En s'intéressant de plus près aux zones de décharges afin d'en déterminer le module de Young, la précision de la mesure apparait rapidement insuffisante (voir figure III.3). En effet, une trop grande incertitude sur la mesure des déplacements est obtenue par rapport à la pente des modules que l'on cherche à déterminer. Il n'est donc pas possible de conclure sur l'évolution du module de Young en fonction de la déformation. La solution d'augmenter le gain du capteur n'est pas souhaitable puisqu'elle diminue, dans le même temps, le rapport signal sur bruit. Le capteur potentiométrique n'est donc pas l'instrument de mesure adéquat pour la détermination du module de Young de la mousse. Au lieu d'essayer d'affiner ce nuage de points par une droite "moyenne", le champ d'investigations a été tout simplement réduit. En étudiant le module de Young sur une plage plus restreinte entre 0 et 2 %, il est possible de choisir un capteur qui possède une course moins grande mais qui est plus précis.

Un capteur d'allongement LVDT, sur lequel le gain a été poussé afin de gagner en sensibilité, a été utilisé. Ce type de capteur est moins soumis au bruit que le capteur potentiométrique. De plus, pour limiter les effets des jeux mécaniques du positionnement du capteur sur la mousse et augmenter la précision sur la valeur de la déformation, la longueur de jauge a été augmentée. La longueur de jauge utilisée est de 241 mm. Entre chaque phase de charge ou de décharge, un palier d'attente est observé afin de faciliter le rattrapage des jeux d'alignement et des jeux de la machine. Au final, une courbe beaucoup plus propre est obtenue sur laquelle les modules de Young de la mousse ont été identifiés (voir figure III.4).

*Remarque : il est important de constater que les échelles des figures III.3 et III.4 sont identiques. Tous les modules ont été déterminés lors de la remise en charge, dans les mêmes conditions. De plus, les valeurs des modules mesurées à l'aide du capteur LVDT sont très différentes de celles, mesurées dans un premier temps, par le capteur potentiométrique. Les valeurs des modules déterminées à l'aide du capteur potentiométrique apparaissent même comme fantaisistes.*

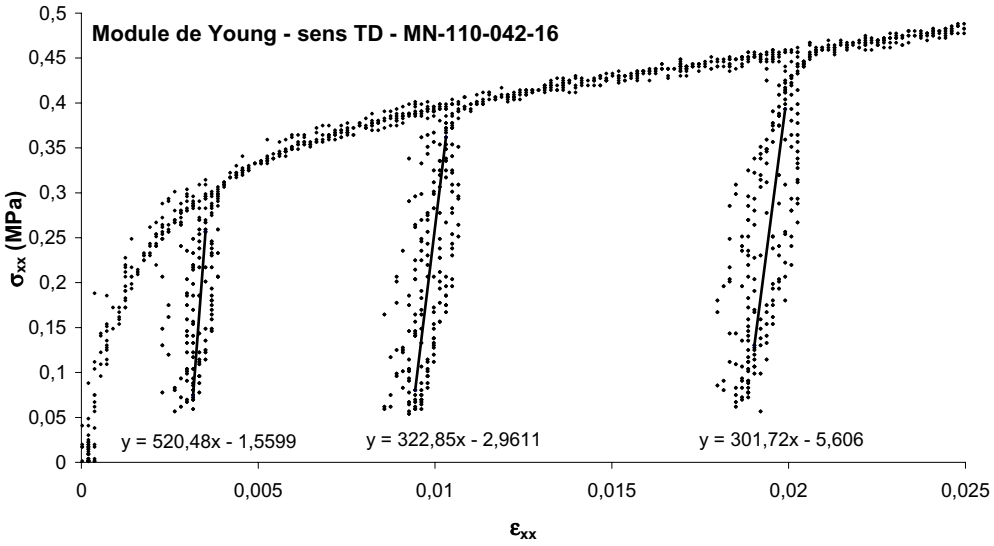



**Figure III.3** : Charges et décharges - Zoom entre 0 et 2 %.

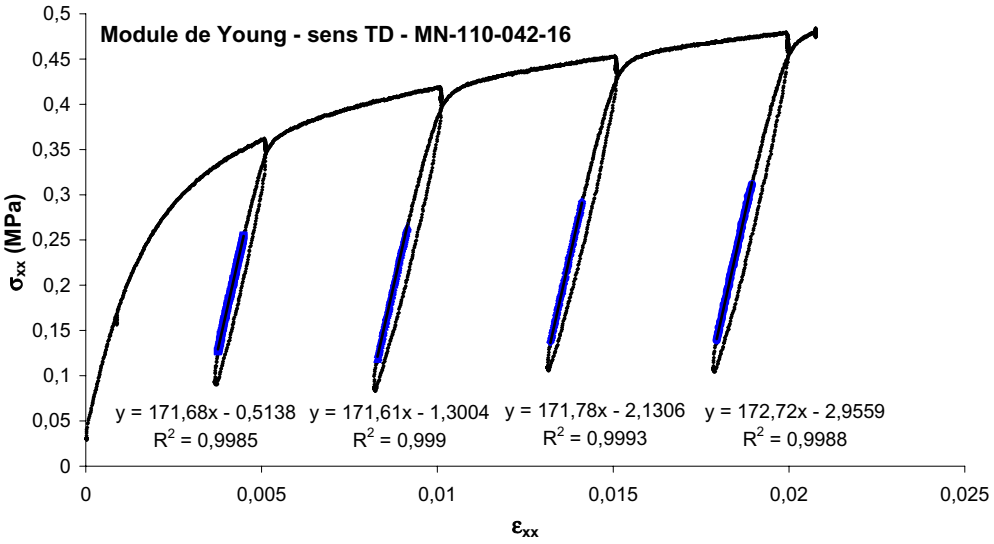



**Figure III.4** : Détermination expérimentale du module de Young.

### a) Correction du module en fonction de la déformation plastique

Toutes les courbes sont représentées dans le repère $(\sigma_{nominal}; \varepsilon_{nominal})$. Le module de Young est la pente à l'origine, dans le domaine élastique.

$$\sigma = E^* \, \varepsilon = E^* \, \frac{\Delta L}{L_0} \tag{III.1}$$

Lorsque le module de Young n'est pas mesuré à l'origine mais au cours de la déformation, l'expression du module de Young devient :

$$\sigma = E^* \, \frac{\Delta L}{L_0 + \Delta L_1} \tag{III.2}$$

Il faut donc réactualiser la longueur de jauge par $L_1 = L_0 + \Delta L_1$

Or, dans notre représentation, le pente mesurée est égale à :

$$\sigma = E^*_{mesuré}\ \varepsilon_{nominal} = E^*_{mesuré}\ \frac{\Delta L}{L_0} \tag{III.3}$$

La valeur du module de Young, lue sur les courbes au cours de la déformation, est donc corrigée à l'aide de la formule suivante :

$$E^* = E^*_{mesuré}\frac{L_0}{\Delta L + L_0} \tag{III.4}$$

Toutes les valeurs expérimentales des modules de Young en fonction du grammage et du sens de prélèvement des éprouvettes sont reportées dans le tableau III.2. La valeur moyenne du module de Young est calculée sur trois essais distincts. Pour chaque essai, quatre mesures du module de Young ont été réalisées (à 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2 % de déformation globale de la mousse). La moyenne et la dispersion présentées dans le tableau III.2 sont donc le résultat de 12 valeurs pour chaque direction de traction.

| Type de mousse | Sens de prélèvement | $E^*$ (MPa) |
|---|---|---|
| MN 110-035-16 | sens RD | 303 ± 10 |
| | sens TD | 116 ± 3 |
| MN 110-042-16 | sens RD | 389 ± 21 |
| | sens TD | 161 ± 7 |
| MN 110-050-16 | sens RD | 537 ± 29 |
| | sens TD | 182 ± 8 |

**Tableau III.2** : Module de Young des mousses de nickel à cellules ouvertes.

*Remarque 1 : la dispersion enregistrée sur les modules est faible (de l'ordre de 5 %). Le même ordre de grandeur est trouvé par Nieh et al (Nieh et al., 2000) pour des mousses d'aluminium à cellules ouvertes (Duocel™), élaborées par la société Energy Research and Generation (ERG).*

*Remarque 2 : les modules entre 0 et 2 % ne montrent pas d'évolution, ce qui semble indiquer que le module de Young de la structure n'évolue pas au cours de la déformation, au moins dans cette faible plage de déformation. De même, dans la littérature, Sugimura et al. (Sugimura et al., 1997) ne notent aucune variation du module de Young pour les mousses d'aluminium à cellules fermées jusqu'à 20 % de déformation.*

A partir du réseau de poutres expérimental de la structure réelle (voir chapitre I), un premier calcul élastique linéaire a été réalisé par Arnaud Fazékas dans sa thèse (Fazékas, 2003). Les valeurs des modules de Young, trouvées numériquement par Arnaud Fazékas, sont reportées dans le tableau III.3.

Les valeurs des modules de Young, établies numériquement, sont inférieures à celles déterminées à partir des essais macroscopiques. Toutefois, l'anisotropie du comportement mécanique est bien décelée. L'écart relatif entre les modules de Young (61 % suivant la direction RD et 31 % suivant la direction TD) s'explique par la non-prise en compte de la géométrie des brins (Fazékas, 2003). Dans le calcul, les poutres sont considérées comme pleines à section carrée tandis que leur forme réelle est creuse en bordure de Plateau. Or, Warren et Kraynik ont montré que pour une mousse composée d'éléments tétraédriques, l'écart des modules de Young est supérieur à 60 % entre des poutres à section carrée ou en bordure de Plateau (voir tableau IV.1). Cet écart est similaire à celui détecté entre les deux modules de Young du tableau III.3.

| Sens de prélèvement | Module de Young $E^*$ (MPa) déterminé à partir : | |
|---|---|---|
| | d'essais mécaniques macroscopiques | d'essais numériques sur le graphe réel |
| Sens RD | 537 | 208 |
| Sens TD | 182 | 126 |

**Tableau III.3** : Module de Young de la mousse de nickel MN 110-050-16 déterminé à partir de la structure réelle des mousses (réseau de poutres) (Fazékas, 2003). Le calcul numérique est effectué sur des poutres pleines à section carrée.

### b) Détermination expérimentale du module de Young

A partir des résultats expérimentaux sur les modules de Young donnés au tableau III.2, le rapport des modules de Young de la mousse et du nickel en fonction de la densité relative est tracé sur la figure III.5a. Il apparaît expérimentalement que le module de Young de la mousse varie avec la densité relative à la puissance $n$. Cette puissance $n$ dépend de la direction de sollicitation.

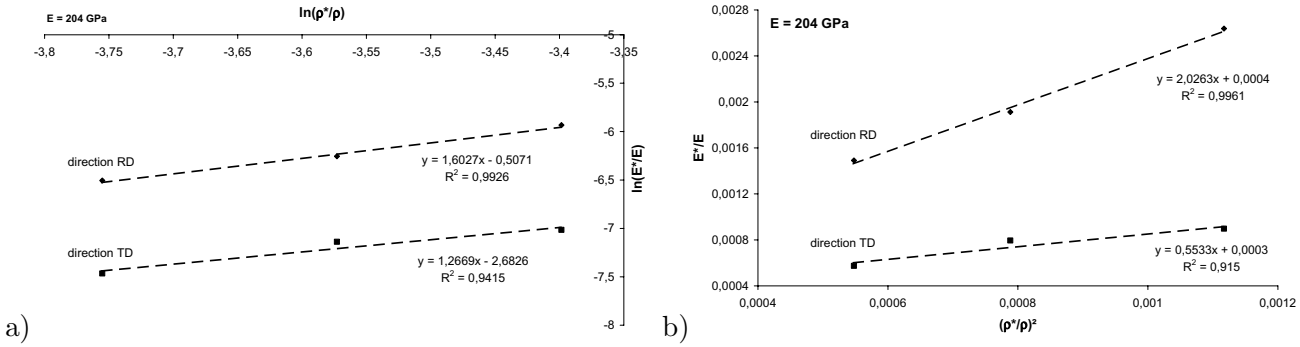



**Figure III.5** : Relation entre le module de Young $E^*$ et la densité relative : a) détermination de la puissance, b) à puissance fixée ($n = 2$).

Expérimentalement, à partir de la figure III.5a, on trouve que :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{E^*_{RD}}{E_{Ni}} &= 0,60 \left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^{1,60} \\ \frac{E^*_{TD}}{E_{Ni}} &= 0,07 \left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^{1,27} \end{aligned}} \qquad \text{(III.5)}$$

Il résulte que les modules de Young suivant la direction RD et TD varient respectivement avec la densité relative à la puissance 1,6 et 1,27. Des exposants différents sont trouvés suivant la direction de sollicitation de la mousse. Leurs valeurs diffèrent aussi de la valeur 2 donnée par le modèle de flexion des brins de Gibson et Ashby. Toutefois, afin d'identifier les coefficients du modèle de Gibson et Ashby, l'exposant de la densité relative est forcé à 2. Cela revient à supposer que la flexion des brins est l'unique mécanisme de déformation des mousses. La figure III.5b représente le rapport des modules de Young de la mousse et du nickel pur en fonction de la densité relative au carré.

En forçant la dépendance de la densité relative à 2, on trouve les expressions suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dfrac{E^*_{RD}}{E_{Ni}} & = & 2,03\left(\dfrac{\rho^*}{\rho}\right)^2 \\ \dfrac{E^*_{TD}}{E_{Ni}} & = & 0,55\left(\dfrac{\rho^*}{\rho}\right)^2 \end{array}} \tag{III.6}$$

On peut constater que le choix de la puissance 2 convient pour décrire l'évolution du module de Young en fonction de la densité relative (surtout pour la direction RD). Le coefficient de la régression linéaire est souvent très proche de 1.

Les constantes de proportionalité (2,03 et 0,55) correspondent au double et à la moitié de la valeur 1, identifiée à partir des résultats expérimentaux par Gibson et Ashby. De même, Warren et Kraynik (Warren et Kraynik, 1997), Choi et Lakes (Choi et Lakes, 1995), Zhu et al. (Zhu et al., 1997) trouvent une valeur de la constante de proportionalité proche de 1. San Marchi et al. (San Marchi et Mortensen, 2001) trouvent une valeur autour de 0,5 pour des mousses d'aluminium à cellules ouvertes, réalisées à partir de préformes en sel. Ils attribuent cette différence au surplus de matière "non actif" autour des nœuds. Dans notre étude, la différence semble être due à l'anisotropie géométrique de la mousse.

Le rapport des modules de Young dans les deux sens de prélèvement est donc égal à :

$$\frac{E^*_{RD}}{E^*_{TD}} = \frac{2,03}{0,55} = 3,7 \tag{III.7}$$

Le module de Young suivant la direction RD est donc pratiquement quatre fois celle du module de Young suivant la direction TD. Le rapport des modules est moins élevé lorsque chaque grammage est considéré séparément (voir tableau III.4).

| Type de mousse | $\dfrac{E^*_{RD}}{E^*_{TD}}$ |
|---|---|
| MN 110-035-16 | 2,6 ± 0,15 |
| MN 110-042-16 | 2,4 ± 0,2 |
| MN 110-050-16 | 2,95 ± 0,3 |

**Tableau III.4** : Rapports des modules de Young expérimentaux en fonction du grammage.

*Remarque : la valeur choisie pour le module de Young du nickel pur est* $E_{Ni} = 204$ GPa *(Liu et al., 1993).*

### III.1.3 Module plastique $H^*$ de la mousse

Comme le montrent les courbes de la figure III.1, les mousses de nickel à cellules ouvertes peuvent être décrites à l'aide d'une loi d'écrouissage isotrope linéaire.
La loi d'écrouissage s'écrit alors de la manière suivante :

$$\sigma^*_y = \sigma^*_0 + H^*\varepsilon^p \tag{III.8}$$

où $\sigma^*_0$ est la limite d'élasticité de la mousse et $H^*$ le module plastique.

Le module plastique se définit comme la pente de la droite tracée dans le repère de la contrainte $\sigma$ en fonction de la déformation plastique.
Dans la représentation $(\sigma;\varepsilon)$, la pente $E_T$ de la partie plastique de la courbe s'exprime en fonction du module de Young et du module plastique de la manière suivante :

$$E_T = \frac{1}{\dfrac{1}{E^*} + \dfrac{1}{H^*}} \tag{III.9}$$

D'où

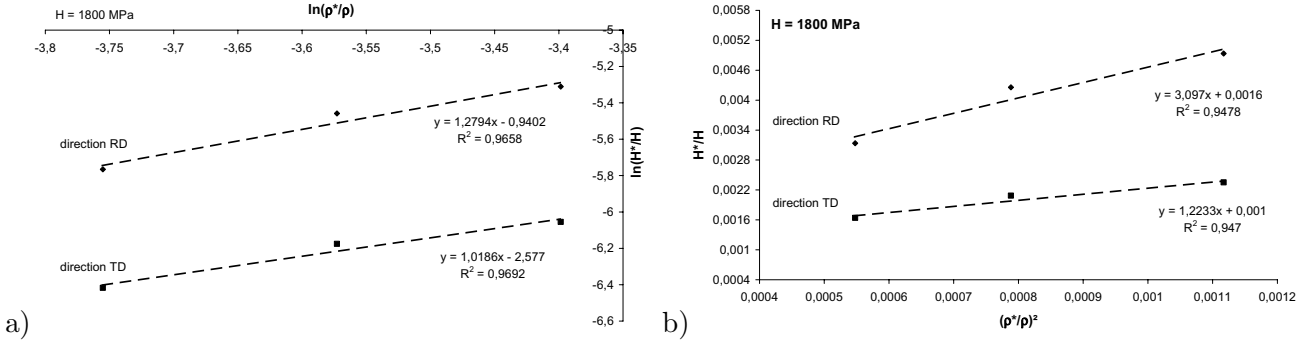
$$\boxed{H^* = \frac{1}{\dfrac{1}{E_T} - \dfrac{1}{E^*}}} \tag{III.10}$$

Les valeurs des modules plastiques, déduites des courbes de traction, sont données dans le tableau III.5.

| Type de mousse | Sens de prélèvement | $H^*$ (MPa) |
|---|---|---|
| MN 110-035-16 | Sens RD | 5,6 ± 0.9 |
| | Sens TD | 2,9 ± 0.25 |
| MN 110-042-16 | Sens RD | 7,6 ± 0.3 |
| | Sens TD | 3,7 ± 0.1 |
| MN 110-050-16 | Sens RD | 8,9 ± 0.9 |
| | Sens TD | 4,2 ± 0.15 |

**Tableau III.5** : Module plastique des mousses de nickel à cellules ouvertes.

A l'aide du tableau III.5, le rapport des modules plastiques de la mousse et du nickel est exprimé en fonction de la densité relative (voir figure III.6).




a) b)

**Figure III.6** : Relation entre le module plastique $H^*$ et la densité relative : a) détermination de la puissance, b) à puissance fixée ($n = 2$).

Les relations suivantes sont alors obtenues :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dfrac{H^*_{RD}}{H_{Ni}} & = & 0,39\left(\dfrac{\rho^*}{\rho}\right)^{1,28} \\ \dfrac{H^*_{TD}}{H_{Ni}} & = & 0,08\left(\dfrac{\rho^*}{\rho}\right)^{1,02} \end{array}} \tag{III.11}$$

Comme dans le cas du module de Young, les exposants sont différents de la valeur 2 prédite par le modèle de flexion des brins et dépendent de la direction de sollicitation de la mousse. Signalons que ces exposants ne sont basés que sur des mesures pour trois grammages différents, proches les uns des autres. L'incertitude sur les exposants est grande et une loi "carrée" est quand même associée à un coefficient de corrélation de 0,95.

En supposant que la flexion des brins est l'unique mécanisme de déformation des brins (voir figure III.6b), on obtient les expressions suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dfrac{H^*_{RD}}{H_{Ni}} & = & 3,10\left(\dfrac{\rho^*}{\rho}\right)^{2} \\ \dfrac{H^*_{TD}}{H_{Ni}} & = & 1,22\left(\dfrac{\rho^*}{\rho}\right)^{2} \end{array}} \tag{III.12}$$

Le rapport des modules plastiques dans les deux sens de prélèvement est :

$$\frac{H^*_{RD}}{H^*_{TD}} = \frac{3,10}{1,22} = 2,5 \tag{III.13}$$

*Remarque : la valeur choisie du module plastique du nickel pur est déduite du comportement d'un feuillard de nickel (voir paragraphe III.4),* $H_{Ni} = 1800$ MPa.

### III.1.4 Limite d'élasticité $\sigma_0^*$ de la mousse

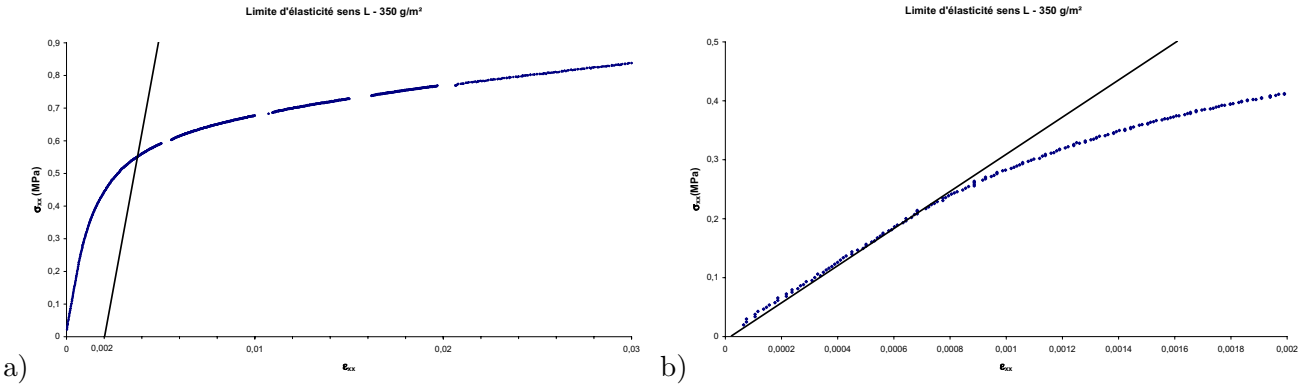
Les mousses de nickel à cellules ouvertes sont décrites à l'aide d'une loi d'écrouissage isotrope linéaire :

$$\sigma_y^* = \sigma_0^* + H^* p \tag{III.14}$$

où $\sigma_0^*$ est la limite d'élasticité de la mousse et $H^*$ le module plastique.

La limite d'élasticité conventionnelle de la mousse, repérée à 0,2 % de déformation, est reportée dans le tableau III.6. Comme le montre la figure III.7a, la limite d'élasticité à 0,2 %, dans le cas des mousses, ne représente pas correctement la transition entre le domaine élastique et plastique. La limite d'élasticité déterminée appartient au domaine plastique de la mousse. Le choix d'une limite d'élasticité à 0,002 % aurait été plus judicieuse (voir figure III.7b). Toutefois, cette dernière possède l'inconvénient d'être bien moins reproductible (incertitude plus grande). C'est pour cela que nous avons choisi de déterminer la limite d'élasticité à 0,2 %. Cependant, nous garderons bien présent à l'esprit que la limite d'élasticité des mousses est bien inférieure à celle déterminée dans le tableau III.6. Elle est typiquement de l'ordre de 0,25 MPa suivant la direction RD et de 0,15 MPa suivant la direction TD.

A partir des résultats expérimentaux sur les limites d'élasticité, le rapport des limites d'élasticité de la mousse et du nickel en fonction de la densité relative est tracé sur la figure III.8.

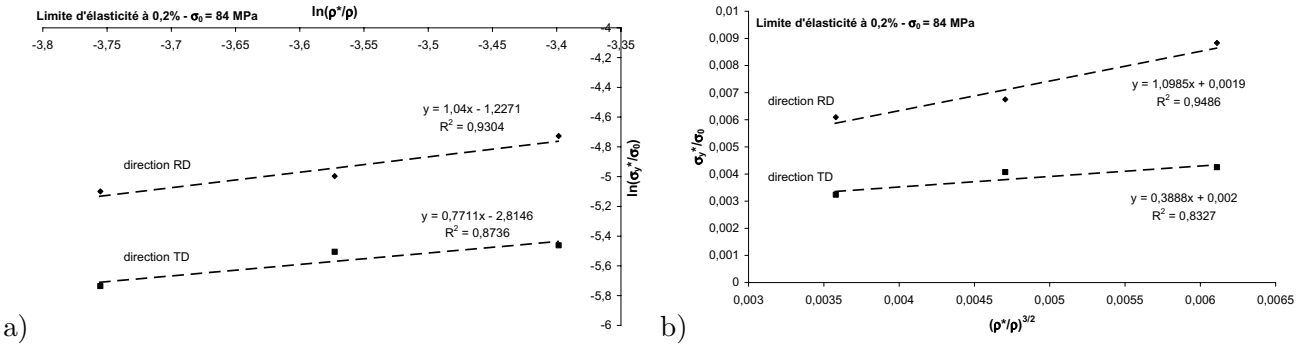



a) b)

**Figure III.7** : Limite d'élasticité des mousses : a) à 0,2 %, b) à 0,002 %.

| Type de mousse | Sens de prélèvement | $\sigma_{p_{0,2}}$ (MPa) |
|---|---|---|
| MN 110-035-16 | Sens RD | 0,51 |
| | Sens TD | 0,27 |
| MN 110-042-16 | Sens RD | 0,57 |
| | Sens TD | 0,34 |
| MN 110-050-16 | Sens RD | 0,74 |
| | Sens TD | 0,36 |

**Tableau III.6** : Limite d'élasticité à 0,2 % des mousses de nickel à cellules ouvertes.




a) b)

**Figure III.8** : Relation entre la limite d'élasticité à 0,2 % et la densité relative de la mousse : a) détermination de la puissance, b) à puissance fixée ($n = 3/2$).

A partir de la figure III.8a, on obtient pour les limites d'élasticité à 0,2 % :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^*_{0\,RD}}{\sigma_0} &= 0,30 \left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^{1,04} \\ \frac{\sigma^*_{0\,TD}}{\sigma_0} &= 0,06 \left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^{0,77} \end{aligned} \qquad \text{(III.15)}$$

Les valeurs des exposants trouvées expérimentalement pour les limites d'élasticité sont inférieures à celles proposées par le modèle de flexion de Gibson et Ashby (< 1,5). La valeur choisie de la limite d'élasticité à 0,2 % pour le nickel pur est $\sigma_0 = 84$ MPa. C'est celle d'un feuillard de nickel de pureté 99,98 %, de 10 $\mu$m d'épaisseur et de taille de grain de l'ordre de 11 $\mu$m (voir paragraphe III.4).

En fixant l'exposant $n$ à 3/2 (voir figure III.8b), il vient que :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dfrac{\sigma^*_{0\,RD}}{\sigma_0} & = & 1,10\left(\dfrac{\rho^*}{\rho}\right)^{3/2} \\ \dfrac{\sigma^*_{0\,TD}}{\sigma_0} & = & 0,39\left(\dfrac{\rho^*}{\rho}\right)^{3/2} \end{array}} \tag{III.16}$$

Le rapport des limites d'élasticité dans les deux sens de prélèvement est donc égal à :

$$\frac{\sigma^*_{0\,RD}}{\sigma^*_{0\,TD}} = \frac{1,10}{0,39} = 2,8 \tag{III.17}$$

## III.2 Dispersion des essais mécaniques

### III.2.1 Dispersion sur le comportement mécanique

La dispersion sur le comportement mécanique des mousses a été quantifiée pour une mousse de 500 g/m² au cours d'essais de traction monotone dans la direction RD de défilement de la mousse (MNS 110-050-16). Sur la figure III.9, une dispersion sur le comportement à rupture est notable mais aussi sur le comportement "général" de la mousse (module de Young, module plastique). Cette effet de la dispersion est beaucoup moins important que celui de l'anisotropie. A déformation fixée, un écart maximum de 0,15 MPa entre les courbes de traction dans la direction RD est observé.

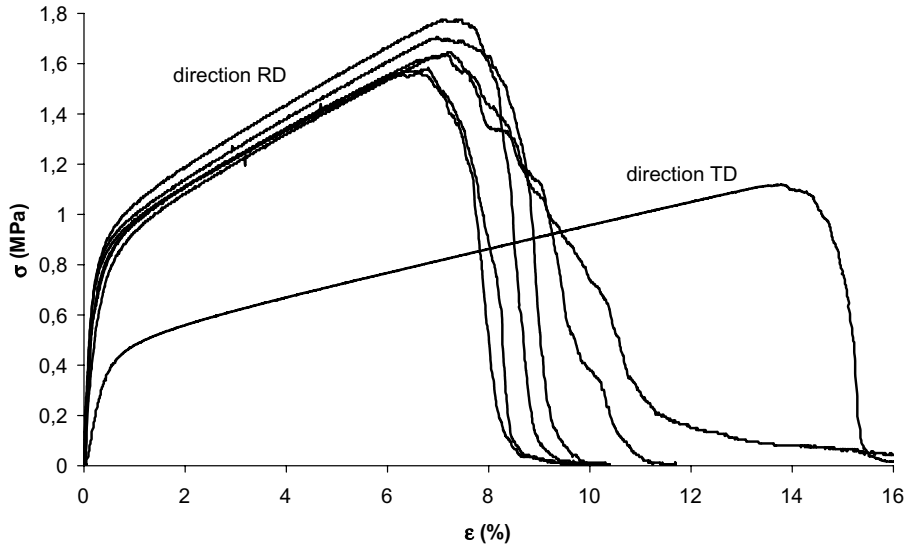



**Figure III.9** : Dispersion sur le comportement de la mousse lors d'une sollicitation dans la direction RD.

Une étude systématique pour les autres grammages et les autres directions de sollicitation n'a pas été menée. Toutefois, la dispersion semble plus resserrée lorsque la mousse est sollicitée suivant la direction transverse TD.

Il est à noter que les courbes de traction présentées sur la figure III.9 proviennent d'échantillons prélevés dans un même rouleau de mousse. Elles sont de plus, issues d'une zone restreinte du rouleau. Une étude, menée par la société NiTECH entre juillet 2000 et juin 2001 (Boudes, 2001), a montré que cette dispersion de comportement est plus élevée pour des rouleaux différents. Le comportement mécanique varie même entre des échantillons prélevés au début et à la fin d'un même rouleau. La mousse de nickel est un produit industriel et son procédé de fabrication n'est pas totalement maîtrisé. Cependant, aucune dérive significative des caractéristiques mécaniques n'a été observée durant toute l'année 2000-2001.

Afin de limiter la dispersion sur le comportement mécanique des mousses, tous les échantillons testés dans cette étude ont été prélevés dans les zones Nord des rouleaux (voir section 2.1.).

*Remarque : cette dispersion sur le comportement mécanique des mousses n'est pas prise en compte dans les modèles développés.*

### III.2.2 Dispersion sur le comportement à rupture

La dispersion sur le comportement à rupture a été étudiée pour la mousse MN 110-050-16 (zone Nord). Les résultats sont regroupés dans le tableau III.7. La moyenne et l'écart-type ont été calculés dans chaque direction pour une dizaine d'essais. Les échantillons ne sont pas tous issus du même rouleau. Le sens 45° signifie que l'éprouvette a été prélevée dans le plan (RD, TD) avec un angle de 45° par rapport à la direction de défilement de la mousse. Ces éprouvettes ont servi à l'identification des paramètres de cisaillement du modèle mécanique utilisé dans la partie VI.1.2.

| Sens de sollicitation | $\sigma^*_{rupt}$ (MPa) | | $\varepsilon^*_{rupt}$ (%) | |
|---|---|---|---|---|
| | Moyenne | Ecart-type | Moyenne | Ecart-type |
| RD | 1,65 | 0,05 | 9,7 | 1,9 |
| 45° | 1,33 | 0,09 | 12,1 | 1,4 |
| TD | 1,10 | 0,1 | 17,3 | 1,9 |

**Tableau III.7** : Dispersion sur le comportement à rupture des mousses de nickel MN 110-050-16.

Dans cette étude, la contrainte à rupture de la mousse $\sigma^*_{rupt}$ est définie comme étant la contrainte maximale atteinte par la mousse. La déformation associée à la contrainte à rupture est choisie comme déformation à rupture $\varepsilon^*_{rupt}$. Les résultats du tableau III.7 font bien ressortir la forte anisotropie mécanique. En effet, la contrainte à rupture est de 1,65 MPa dans la direction RD alors qu'elle n'atteint que de 1,1 MPa dans la direction TD. Parallèlement à cela, la déformation à rupture passe de 9,7 % dans la direction RD à 17,3 % dans la direction TD. La déformation à rupture est donc pratiquement doublée lorsque la direction de sollicitation est changée.

## III.3 Influence de la vitesse sur le comportement mécanique

Des essais de traction monotone sur la mousse MNS 110-050-16 ont été réalisés à différentes vitesses de la traverse à température ambiante.

Les éprouvettes rectangulaires ont les dimensions suivantes : 120 mm de longueur de jauge, et 30 mm de large. Le champ des vitesses traverse balayé s'étend de 0,1 à 500 mm/min (voir tableau III.8). La correspondance entre la vitesse traverse et la vitesse de déformation de la mousse est donnée dans le tableau III.8.

| Vitesse traverse (mm/min) | Vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ ($s^{-1}$) |
|---|---|
| 500 | 7. $10^{-2}$ |
| 100 | 1,4 $10^{-2}$ |
| 10 | 1,4 $10^{-3}$ |
| 0,1 | 1,4 $10^{-5}$ |

**Tableau III.8** : Vitesse de déformation de la mousse.

La figure III.10 représente le comportement mécanique enregistré au cours des différents essais pour les deux directions de sollicitation RD et TD. Les essais effectués aux faibles vitesses ont un niveau de contrainte "général" moins élevé. Plus la vitesse traverse est faible, plus le niveau de contrainte pour une même déformation est petit. Un léger effet de la vitesse de sollicitation semble donc être présent. Toutefois, dans notre cas, le faible effet, observé sur le comportement mécanique en traction pour une gamme de vitesse de plus de trois décades, reste inférieur à celui de la dispersion, relevé au paragraphe III.2.

La compression des mousses d'aluminium à cellules fermées, pour des vitesses de déformation allant de $10^{-3}$ à $10^{3}$ $s^{-1}$, montre que l'effet de la vitesse sur le comportement mécanique diminue lorsque la densité relative de la mousse devient de plus en plus petite (Feng et al., 2001; Ruan et al., 2002). La très faible densité relative des mousses de nickel à cellules ouvertes ($\sim$ 0,03) par rapport à celle des mousses d'aluminium à cellules fermées (jusqu'à 0,3) semblent donc être en faveur d'une limitation de l'effet de la vitesse de sollicitation sur les mousses à cellules ouvertes. De plus, Deshpande et al. (Deshpande et Fleck, 2000a) ainsi que Dannemann et al. (Dannemann et Lankford, 2000) ne notent pas d'effet de la vitesse au cours d'essais de compression sur des mousses d'aluminium à cellules ouvertes.

Il nous paraît donc possible de ne prendre en compte aucun effet de la vitesse de sollicitation sur le comportement mécanique des mousses de nickel à température ambiante dans la suite de ce document.

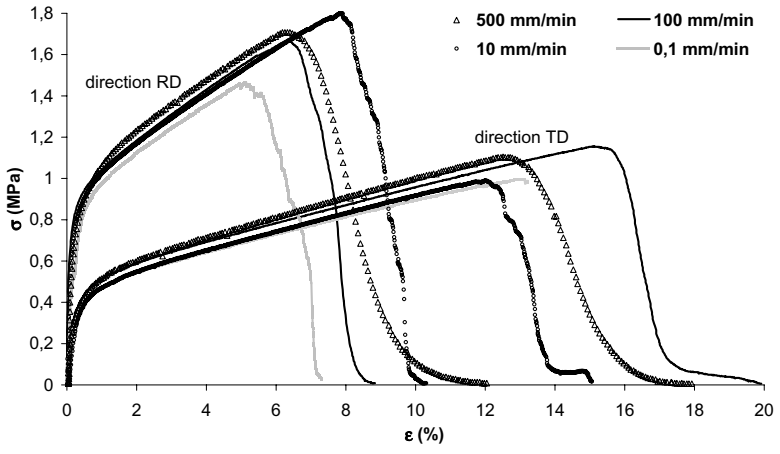



**Figure III.10** : Influence de la vitesse de sollicitation sur le comportement de la mousse.

## III.4 Etude du comportement mécanique d'un feuillard de nickel

Pour modéliser le comportement mécanique des mousses, une bonne connaissance du comportement mécanique du matériau constitutif de la mousse est nécessaire. Le comportement du nickel a donc été étudié à partir d'un feuillard, indépendamment de l'influence de la structure de la mousse. L'étude des propriétés d'un feuillard de nickel de 10 $\mu$m d'épaisseur a été menée par V. Goussery (Goussery, 2004). L'épaisseur du feuillard ainsi que sa pureté ont été choisies afin de correspondre au mieux aux caractéristiques des brins de la mousse. Un traitement thermique à 900°C pendant 6 heures a permis d'obtenir une taille de grains moyenne proche de celle de la mousse : $\bar{d} = 11,44$ $\mu$m. Le feuillard de nickel possède donc une structure de type "bambou", identique à celle de la mousse.

La figure III.11 présente le comportement mécanique de ce feuillard soumis à un effort de traction. Deux régimes distincts sont visibles sur cette figure : une partie élastique linéaire, suivie d'un écrouissage quasi-linéaire. Le comportement mécanique du feuillard ressemble à celui de la mousse, sauf que la partie non-linéaire est beaucoup plus restreinte (voire quasi-nulle). Sur la base de cette courbe, le module plastique et la limite d'élasticité du nickel ont été déduits.

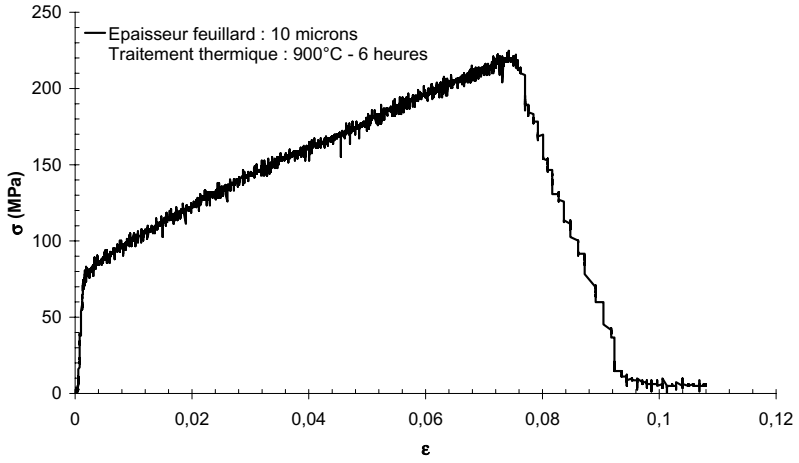



**Figure III.11** : Comportement mécanique d'un feuillard de nickel (Goussery, 2004).

Les valeurs du module plastique et de la limite d'élasticité du feuillard de nickel sont :

$$\begin{aligned} H_{Ni} &= 1800 \text{ MPa} \\ \sigma_0 &= 84 \text{ MPa} \end{aligned} \tag{III.18}$$

*Remarque : le module de Young n'a pas été déterminé à partir de cette courbe à cause du manque de précision. Sa valeur a été cherchée dans la littérature (Liu et al., 1993).* $E_{Ni} = 204$ *GPa.*

# Chapitre IV

# Modélisation du comportement uniaxial des mousses en traction

## Sommaire


**IV.1 Eléments bibliographiques sur la modélisation du comportement mécanique des mousses . . . . . 88**

IV.1.1 Modèle de Lederman (Lederman, 1971) . . . . . 88

IV.1.2 Modèle de Warren et Kraynik (Warren et Kraynik, 1991) . . . . . 89

**IV.2 Modèle élastique – cellule anisotrope . . . . . 91**

IV.2.1 Flexion élastique d'un brin de la mousse . . . . . 92

IV.2.2 Règles de changement d'échelle . . . . . 93

IV.2.3 Modèle de déformation élastique de la mousse . . . . . 94

**IV.3 Modèle élastoplastique – cellule anisotrope . . . . . 101**

IV.3.1 Flexion élastoplastique d'un brin de la mousse . . . . . 101

IV.3.2 Règles de changement d'échelle . . . . . 104

IV.3.3 Modèle de déformation élastoplastique de la mousse par flexion des brins . . . . 104

IV.3.4 Expression de la limite d'élasticité $\sigma_0^*$ de la mousse . . . . . 107

IV.3.5 Expression du module plastique $H^*$ de la mousse . . . . . 108

**IV.4 Cas des mousses à deux phases . . . . . 114**

IV.4.1 Détermination de la flèche d'un brin composite "élastique/élastique" . . . . . 114

IV.4.2 Comportement de la mousse à deux phases : élastique/élastique . . . . . 116

IV.4.3 Détermination de la flèche d'un brin composite "élastoplastique/élastoplastique" 117

IV.4.4 Comportement de la mousse à deux phases : élastoplastique/élastoplastique . . 119

**IV.5 Application des modèles à deux phases . . . . . 120**

IV.5.1 Mousses à brins creux . . . . . 120

IV.5.2 Mousses à différents degrés d'oxydation . . . . . 124

IV.5.3 Rupture des mousses oxydées . . . . . 129

**IV.6 Synthèse des principaux résultats de la deuxième partie . . . . . 138**

Le choix d'une cellule élémentaire représentative pour modéliser le comportement mécanique des mousses n'est pas simple. De nombreux modèles avec différentes formes de cellules ou de jonction entre les brins existent dans la littérature. Dans ce chapitre, aucune hypothèse sur la forme de la cellule représentative n'est formulée. En revanche, la flexion des brins est supposée être l'unique mécanisme de déformation des brins. Le comportement élastoplastique global de la mousse de nickel est donc déduit de l'étude de la flexion élastoplastique simple des brins. Le cas de mousses comportant plusieurs phases est aussi envisagé selon la même démarche.

La cellule représentative trouvée en tomographie aux rayons X n'est pas utilisée ici. En revanche, d'autres résultats issus de la tomographie aux rayons X sont employés dans les modèles proposés dans ce chapitre.

## IV.1 Eléments bibliographiques sur la modélisation du comportement mécanique des mousses

La structure des mousses métalliques à cellules ouvertes permet de les représenter au moyen d'un assemblage de poutres. Dans le cas des cellules fermées, les poutres sont liées entre elles par des parois minces assimilées à des plaques. Cependant, l'étude du comportement mécanique des mousses diffère suivant l'élément représentatif de la microstructure retenu. Gent et Thomas (Gent et Thomas, 1959) et Lederman (Lederman, 1971) ont par exemple choisi d'isoler la déformation mécanique d'une poutre, tandis que Warren et Kraynik (Warren et Kraynik, 1991; Warren et Kraynik, 1997) préfèrent considérer sous forme tétraédrique les nœuds du réseau. De nombreux auteurs s'intéressent au comportement mécanique d'une cellule isolée. Deux cellules sont communément choisies pour décrire le comportement de la mousse : le tétrakaidécahèdre de Kelvin (Chan et Xie, 2003; Kwon et al., 2003; Mills et Gilchrist, 2000; Warren et Kraynik, 1988; Warren et al., 1989; Zhu et al., 1997), qui pave l'espace et minimise l'énergie de surface, et le dodécahèdre pentagonal (Chan et Nakamura, 1969; Menges et Knipschild, 1975; Patel et Finnie, 1970). L'étude d'un réseau régulier de tétrakaidécahèdres de Kelvin donne des propriétés élastiques quasi-isotropes. Zhu et al. (Zhu et al., 1997) ont montré que le module de Young varie de moins de dix pourcents suivant la direction de sollicitation. Ko (Ko, 1965), Gibson et Ashby (Gibson et Ashby, 1997) ont, quant à eux, envisagé la déformation d'une cellule élémentaire de forme cubique ou hexagonale. Au cours de ces dernières années, la nature "aléatoire" de la forme des cellules est prise en compte (Roberts et Garboczi, 2001; Roberts et Garboczi, 2002; Zhu et al., 2000). Le comportement mécanique des structures de mousse simulées numériquement est calculé à l'aide de la méthode des éléments finis.

Afin de bien remarquer l'importance du choix des mécanismes de déformation sur les propriétés élastiques de la mousse, deux modèles analytiques sont repris un peu plus en détail : le premier est fourni par Lederman (Lederman, 1971), et le second est proposé par Warren et Kraynik (Warren et Kraynik, 1991). Lederman envisage un modèle d'étirement des brins tandis que Warren et Kraynik considèrent aussi des phénomènes de flexion. Ces deux approches sont décrites ici de manière succinte. Leur but est seulement de mettre en évidence la dépendance de la densité relative (valeur de l'exposant) en fonction du mécanisme de déformation choisi. Pour plus d'informations sur la modélisation des mousses, le lecteur pourra se réferrer au travail de thèse de Blazy (Blazy, 2003) où une revue plus complète est réalisée.

### IV.1.1 Modèle de Lederman (Lederman, 1971)

Historiquement, Gent et Thomas (Gent et Thomas, 1959) ont été les premiers à s'intéresser aux relations entre la géométrie d'un réseau cubique périodique de poutres et ses propriétés mécaniques. Dans leur approche, les poutres possèdent un comportement élastique et se déforment suivant des mécanismes de traction/compression. Elles sont liées entre elles par des nœuds rigides. Avec ce modèle, ils obtiennent un module de Young suivant la direction de chargement proportionnel à la densité relative de la mousse.

Le modèle de Lederman (Lederman, 1971), paru une dizaine d'années plus tard, s'apparente beaucoup à celui de Gent et Thomas. Lederman utilise un réseau de fibres cylindriques (de longueur $l$ et de section $a$) reliées par des sphères rigides (de diamètre $D$). Le nombre $n$ de poutres connectées à une même sphère est fixe et l'orientation des fibres est supposée aléatoire.

Lederman considère la déformation d'une poutre orientée au hasard, qui s'allonge par l'intermédiaire du déplacement affine des nœuds du réseau. Il introduit alors une fonction de distribution des orientations des barres dans l'espace, puis intègre celle-ci suivant toutes les directions de l'espace. En jouant sur la distribution des orientations des arêtes des cellules, Lederman montre qu'une mousse à structure anisotrope possède des propriétés élastiques anisotropes. Les expressions des propriétés mécaniques s'écrivent en fonction de deux rapports : celui de la section des fibres sur l'aire des sphères et celui de la longueur des fibres sur le diamètre des sphères.

Pour une mousse avec des brins orientés aléatoirement, l'expression du module est la suivante :

$$\frac{E}{E_{métal}} = \frac{3}{5}\left(1 - \frac{2}{3}\nu\right)\left(\frac{na}{\pi D^2}\right)\left(\frac{D}{l}\right)^2\left(\frac{1}{1+D/l}\right) \tag{IV.1}$$

Et, la densité relative s'écrit :

$$\frac{\rho}{\rho_{métal}} = \frac{3\left(D/l\right)^2}{\left(1+D/l\right)^2}\left(\frac{na}{\pi D^2} + \frac{D}{3l}\right) \tag{IV.2}$$

Comme Gent et Thomas, Lederman prévoie une dépendance linéaire du module de Young avec la densité relative. Toutefois, ces trois auteurs ne prennent pas en compte dans leur modèle, le fléchissement des brins. En s'appuyant sur la simulation numérique d'une structure à deux dimensions en nid d'abeille, Warren et Kraynik (Warren et al., 1989) indiquent que le comportement élastique est dominé aux faibles déformations par des phénomènes de flexion tandis que l'étirement des brins devient prépondérant aux grandes déformations. Le mode de déformation de la mousse est dicté par sa structure (Deshpande et al., 2001). Roberts et al. (Roberts et Garboczi, 2001) ont trouvé, pour des mousses à cellules fermées créées numériquement à partir de réseaux de Voronoï, que la flexion des brins devient le mécanisme de déformation dominant lorsque 70 % des parois des cellules sont enlevées.

### IV.1.2 Modèle de Warren et Kraynik (Warren et Kraynik, 1991)

La théorie de Warren et Kraynik repose sur l'étude du comportement micromécanique d'une jonction en forme de tétraèdre contenue dans une cellule unitaire tétraédrique, arbitrairement orientée (voir figure IV.1).

Cet assemblage est composé de quatre demi-barreaux de longueur $L$, faisant un angle de 109°28'16" deux à deux. Warren et Kraynik analysent, à l'aide de cette jonction tétraédrique élémentaire, la phase élastique linéaire (Warren et Kraynik, 1988) et non-linéaire (Warren et Kraynik, 1991) d'une mousse isotrope à cellules ouvertes de faible densité. La forme particulière de la jonction et le déplacement des milieux des poutres supposé affine, permet la prise en compte des mécanismes de flexion et d'extension des brins. Les moments de torsion et de flexion au milieu des brins seront ajoutés au modèle en 1997 lors de l'étude d'une mousse de Kelvin (Warren et Kraynik, 1997). Le déplacement d'un demi-brin est relié linéairement aux forces appliquées par la souplesse axiale $M$ et celle de flexion $N$. Ces souplesses ne dépendent pas de l'amplitude des forces appliquées.

Pour une mousse de faible densité, sous contrainte uniaxiale, le résultat suivant est obtenu :

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{3}L}\left(\frac{11}{10N}\varepsilon + \frac{187}{50N}\varepsilon^2 + \frac{6}{175M}\varepsilon^3\right) \tag{IV.3}$$

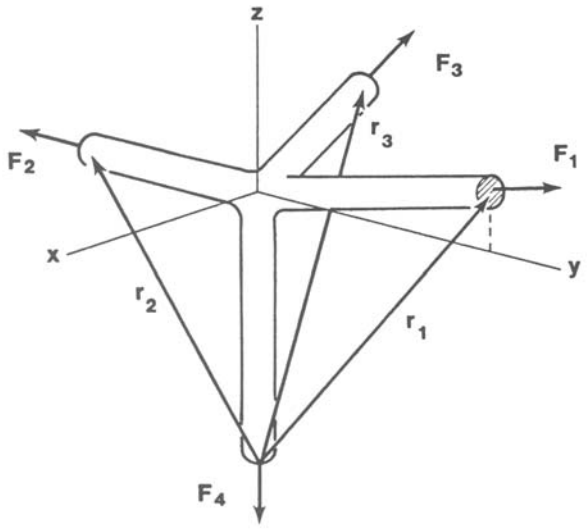



**Figure IV.1** : Jonction tétraédrique (Warren et Kraynik (Warren et Kraynik, 1988; Warren et Kraynik, 1991)).

avec $\frac{1}{M} = 2\sqrt{3}EL\phi$ et $\frac{1}{N} = 2\sqrt{3}EL\phi^2$ pour des brins de section triangulaire et uniforme dans leur longueur.

L'équation (IV.3) met bien en évidence le rôle du fléchissement de la structure aux faibles déformations tandis que celui de l'allongement des brins est visible aux grandes déformations. Le comportement du demi-brin étant supposé élastique linéaire, la non-linéarité du comportement mécanique de la mousse, qui intervient aux grandes déformations, est attribuée à des effets géométriques non-linéaires lors de la réorientation des brins étirés.

Warren et Kraynik (Warren et Kraynik, 1988) se sont aussi intéressés à l'influence de la forme de la section des brins sur le module de Young dans le cas d'éléments tétraédriques. Ces éléments sont supposés avoir une orientation équiprobable dans toutes les directions de l'espace. Pour des mousses à faible densité relative ($\Phi \ll 1$), ils trouvent que :

$$\frac{E^*}{E_{Ni}} = \frac{33\sqrt{3}\ I}{5\ A^2}\ \Phi^2 \tag{IV.4}$$

où $I$ le moment d'inertie du brin et, $A$ l'aire de la section du brin.

Le tableau IV.1 donne l'expression du module de Young de la mousse pour des géométries différentes de section de brin. Les propriétés élastiques de la mousse sont fortement influencées par la forme des brins. En effet, l'écart entre les modules de Young, calculés au moyen d'une section carrée ou en bordure de Plateau, est supérieur à 60 %.

*Remarque : le brin de nickel de la mousse NiTECH possède une géométrie plus complexe que celles données dans le tableau IV.1. En effet, il est creux, en forme de bordure de Plateau avec des bourrelets aux sommets, et à section variables le long du brin.*

Le modèle de Warren et Kraynik utilise une connectivité de quatre comme la plupart des mousses réelles. Une autre modélisation, celle de Gibson et Ashby (Gibson et Ashby, 1997), possède une connectivité de trois mais reste toutefois performante dans la prédiction du comportement des mousses réelles. Le modèle de Gibson et Ashby n'est pas directement repris dans la suite du chapitre. Cependant, la même philosophie et la même démarche sont suivies.

| Section | Carrée | Triangulaire | En bordure de Plateau |
|---|---|---|---|
| $I/A^2$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6\sqrt{3}}$ | $\frac{20\sqrt{3}-11\pi}{6\left(2\sqrt{3}-\pi\right)^2}$ |
| $E^*/E_{Ni}$ | $0,95\ \Phi^2$ | $1,10\ \Phi^2$ | $1,53\ \Phi^2$ |

**Tableau IV.1** : Expression du module de Young pour différentes formes de section des brins (Warren et Kraynik, 1988)

## IV.2 Modèle élastique – cellule anisotrope

Au cours de ces dernières années, le modèle de Gibson et Ashby (Gibson et Ashby, 1997) s'est imposé comme la référence dans le domaine des matériaux cellulaires. Son principal atout réside dans sa simplicité. Gibson et Ashby considèrent que la flexion est le principal mécanisme de déformation des brins de la mousse. En étudiant la flexion d'une poutre, ils en déduisent les propriétés élastiques et plastiques des mousses. Ces propriétés sont reliées à la densité relative de la mousse. La figure IV.2 présente un exemple d'assemblage de cellules anisotropes se déformant préférentiellement par fléchissement des brins. L'arrangement de ces cellules est tel que les brins des cellules rejoignent ceux des autres cellules en leur milieu. Ainsi, même si la cellule élémentaire parallélépipédique ne correspond pas à la réalité, elle a l'avantage de se déformer selon les mêmes mécanismes qu'une cellule réelle. Le modèle de Gibson et Ashby, réécrit pour une cellule anisotrope avec trois dimensions caractéristiques, est présenté au paragraphe a) à la page 94. Tout au long de ce chapitre, la même démarche que celle suivie par Gibson et Ashby est employée.

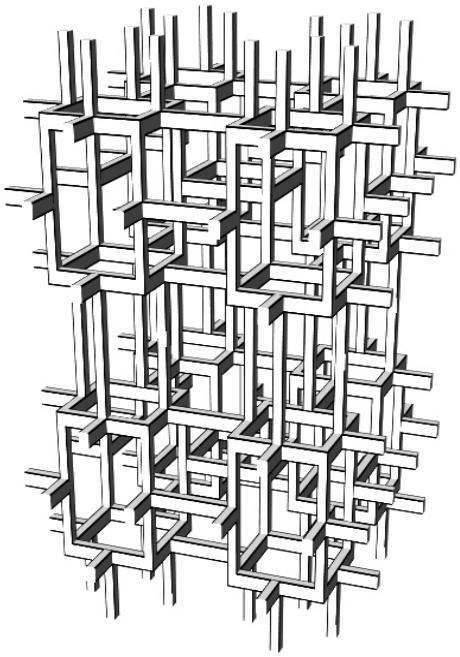


**Figure IV.2** : Modélisation du comportement mécanique anisotrope d'une mousse à l'aide de cellules anisotropes.

### IV.2.1 Flexion élastique d'un brin de la mousse

Un court rappel est introduit ici sur la flexion élastique d'un brin de la mousse. L'expression de la flèche en fonction du moment de flexion est établie. Ce court interlude permet de faciliter la lecture et la compréhension des développements réalisés dans les paragraphes suivants pour une poutre élastoplastique.

Soit $l$, la longueur d'une poutre élémentaire, et $t \times t$, sa section carrée (voir figure IV.3). Pour des raisons de symétrie évidente, seule la moitié de la poutre $l/2$ est considérée. On se place dans des conditions de contraintes planes. La poutre de la figure IV.3 est soumise à de la flexion et du cisaillement combinés. Cependant, on se place ici dans un cas idéalisé où seule la flexion pure (moment $M$) est prise en compte.

Soit $M$ le moment de flexion et ($Ox$,$Oy$,$Oz$) le repère orthonormé où $O$ est situé au centre d'un brin (voir figure IV.3).

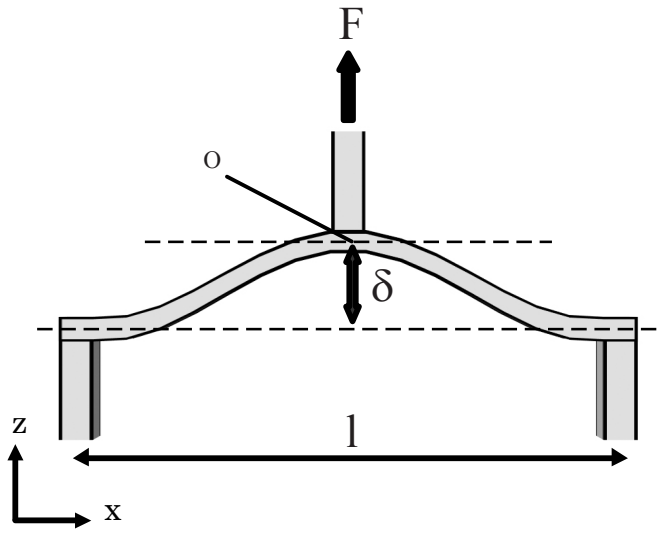



**Figure IV.3** : Flexion et cisaillement d'un brin de longueur $l$.

En flexion pure, l'état des contraintes est uniaxial.

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{IV.5}$$

D'après l'hypothèse de Navier–Bernoulli où une section droite reste plane après déformation, il vient que $\sigma_{xx}$ et $\varepsilon_{xx}$ sont proportionnels à $z$.
Soit

$$\sigma_{xx} = kz \tag{IV.6}$$

Le moment $M$ s'exprime alors :

$$M = \int_{-t/2}^{t/2} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma z \, dy \, dz = 2t \int_{0}^{t/2} kz^2 \, dz \tag{IV.7}$$

$$\boxed{M = \frac{kt^4}{12} = kI} \tag{IV.8}$$

où $I$ est le moment d'inertie de la poutre.

En élasticité, on obtient donc :

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{xx}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\nu\sigma_{xx}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu\sigma_{xx}}{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Mz}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\nu Mz}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu Mz}{EI} \end{pmatrix} \tag{IV.9}$$

où $E$ est le module de Young et $\nu$ le coefficient de Poisson du matériau constituant la poutre.

A partir du tenseur des déformations, on peut en déduire le champ des déplacements $u_x$ et $u_z$ en chaque point de la poutre.
En s'appuyant sur les conditions aux limites suivantes $u_x(\forall x; z = 0) = 0$ et $u_z(x = l/2; z = 0) = 0$, il vient alors que :

$$\begin{cases} u_x &= \dfrac{M}{EI}\, x\, z \\ u_z &= -\dfrac{\nu M}{2EI} z^2 + \dfrac{M}{2EI}\left(\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 - x^2\right) \end{cases} \tag{IV.10}$$

La flèche de la poutre est définie ici comme le déplacement vertical du point $0\,(x = 0; z = 0)$. On obtient en régime élastique :

$$\boxed{\delta = u_z(x = 0; z = 0) = \frac{M}{2EI}\left(\frac{l}{2}\right)^2} \tag{IV.11}$$

### IV.2.2 Règles de changement d'échelle

Le modèle analytique, que l'on souhaite mettre en place, doit retranscrire le comportement macroscopique global de la mousse. Il doit donc être capable de relier la contrainte macroscopique $\sigma^*$ de la mousse à sa déformation $\varepsilon^*$ (voir figure IV.4).

Au niveau microscopique (à l'échelle du brin), le modèle analytique est basé sur la flexion des brins comme unique mécanisme de déformation des mousses. La mise en équation du fléchissement des brins donne donc une relation entre la force $F$ et la flèche $\delta$. En ne pré-supposant pas la forme de la cellule représentative de la mousse, deux constantes sont naturellement introduites pour retranscrire le changement d'échelle entre les brins et la mousse.

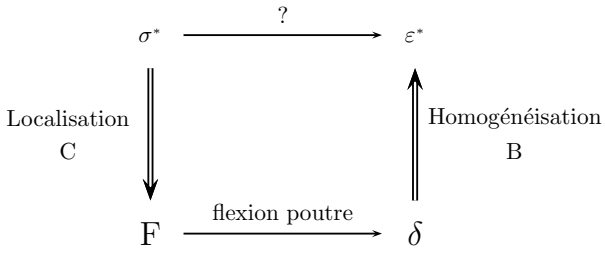



**Figure IV.4** : Schéma du changement d'échelle.

Les deux constantes permettant ce changement d'échelle sont appelées $B$ et $C$. Le passage des forces à la contrainte de la mousse s'effectue à l'aide de la constante $C$, et la transition entre les flèches des poutres et la déformation de la mousse est représentée à l'aide de la constante $B$. Ces constantes reviennent à appliquer une procédure d'homogénéisation. La procédure d'homogénéisation est basée sur le concept

de volume élémentaire représentatif. Le volume élémentaire doit être assez grand pour représenter le comportement global mais, aussi suffisamment petit pour reproduire les inhomogénéités macroscopiques. Une approche similaire est réalisée ici, où les forces et les flèches microscopiques sont homogénéisées pour donner la contrainte et la déformation d'un milieu "continu". La même démarche est utilisée par (Grenestedt, 1999; Diebels et Steeb, 2003).

Pour un chargement suivant la direction RD de la mousse, les équations s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \sigma^* &= C\,\dfrac{F_a + F_c}{ac} \\ \varepsilon^* &= B\,\dfrac{\delta}{b} \end{cases} \tag{IV.12}$$

### IV.2.3 Modèle de déformation élastique de la mousse par flexion des brins

Comme annoncé précédemment, la forme de la cellule représentative de la mousse n'est pas supposée. On considère seulement trois familles de poutres de longueurs différentes ($a$, $b$ et $c$) à section carrée $t \times t$. La prise en compte d'une autre forme de poutre est facile. Seules les expressions du moment d'inertie $I$ et de la densité relative de la mousse sont à modifier. Les poutres de longueur $a$, $b$ et $c$ sont supposées être orientées respectivement suivant la direction transverse TD, la direction de défilement RD, et la direction normale ND de la mousse.

On appellera $F_a$, $F_b$ et $F_c$ les forces qui s'appliquent respectivement au milieu de chaque poutre de longueur $a$, $b$ et $c$. Pour simplifier les explications et permettre une meilleure visualisation des équations, on s'appuiera sur l'exemple de cellule anisotrope donnée à la figure IV.5a tout en gardant présent à l'esprit, que la forme géométrique particulière de la cellule n'est pas prise en considération dans les équations.

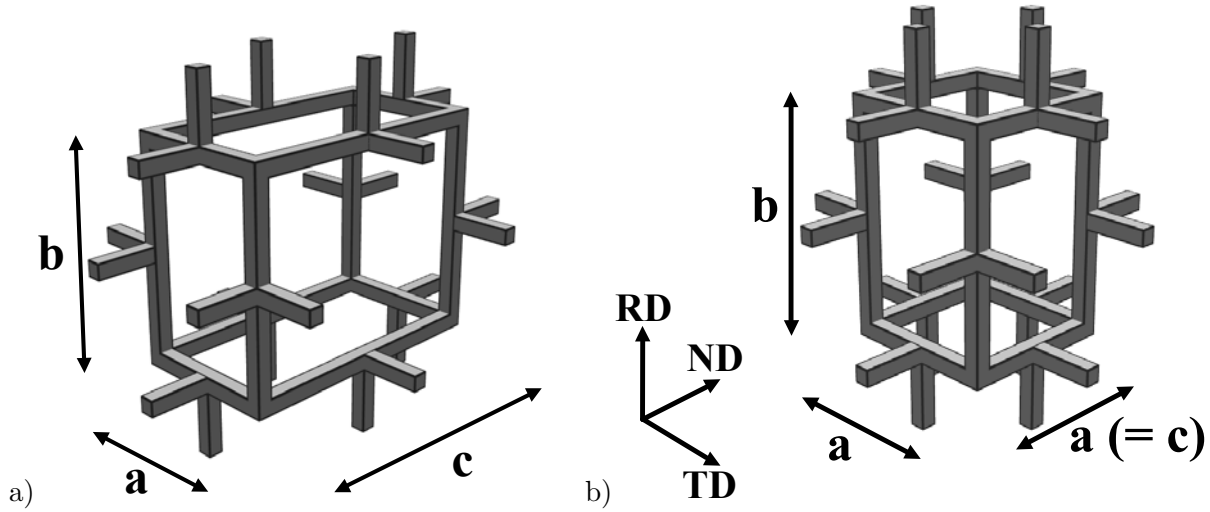



**Figure IV.5** : Exemple de cellules anisotropes : a) cellule orthorombique, b) cellule de type Gibson et Ashby (quadratique).

#### a) Modèle à déformation imposée (Voigt)

Soit $M_a$, $M_b$ et $M_c$, le moment de flexion qui s'exerce sur la poutre de longueur $a$, $b$ et $c$.

Dans un premier temps, on choisit d'appliquer les forces $F_a$ et $F_c$ suivant la direction RD, perpendiculairement au plan (TD, ND).

*Remarque : dans le cas où les forces sont appliquées suivant une autre direction, le fondement des équations reste inchangé. Une simple permutation des coefficients a, b et c est nécessaire.*

Macroscopiquement, on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon^* &= B\,\frac{\delta}{b} && \text{(IV.13)}\\ \sigma^* &= C\,\frac{F_a+F_c}{ac} && \text{(IV.14)}\\ M_a &= F_a\,\frac{a}{2} && \text{(IV.15)}\\ M_c &= F_c\,\frac{c}{2} && \text{(IV.16)} \end{aligned}$$

De plus, pour la flexion élastique d'une poutre, on a vu que :

$$\begin{aligned} \delta_a &= \frac{M_a}{2EI}\left(\frac{a}{2}\right)^2 && \text{(IV.17)}\\ \delta_c &= \frac{M_c}{2EI}\left(\frac{c}{2}\right)^2 && \text{(IV.18)} \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\sigma^* = 2C\left(\frac{M_a}{a^2c}+\frac{M_c}{ac^2}\right) = 16C\left(\frac{EI\delta_a}{a^4c}+\frac{EI\delta_c}{ac^4}\right) \qquad \text{(IV.19)}$$

Dans le cadre d'un déplacement de la mousse à déformation imposée (hypothèse de Voigt), on suppose que les poutres de la surface sur lesquelles s'applique la force macroscopique $F$ se déplacent toutes de la même quantité. On a donc égalité des flèches. Cette hypothèse est faite par Gibson et Ashby dans (Gibson et Ashby, 1997, p.259).

$$\delta = \delta_a = \delta_c \qquad \text{(IV.20)}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \sigma^* &= 16CEI\left(\frac{1}{a^4c}+\frac{1}{ac^4}\right)\delta = \frac{16CEIb}{B}\left(\frac{1}{a^4c}+\frac{1}{ac^4}\right)\varepsilon^*\\ &= \frac{16CEIb}{Bac^4}\left(1+\left(\frac{c}{a}\right)^3\right)\varepsilon^* && \text{(IV.21)} \end{aligned}$$

Donc, pour une sollicitation suivant la direction de défilement de la mousse, on trouve que :

$$\boxed{\frac{E^*_{RD}}{E} = \frac{16C}{B}\frac{Ib}{ac^4}\left(1+\left(\frac{c}{a}\right)^3\right)} \qquad \text{(IV.22)}$$

Maintenant, si la traction est effectuée suivant la direction transverse TD de la mousse, la force macroscopique $F$ s'applique sur la section contenant les brins de longueur $b$ et $c$. Il suffit donc de permuter le paramètre $a$ avec $b$.

L'équation (IV.22) devient alors :

$$\boxed{\frac{E^*_{TD}}{E} = \frac{16C}{B}\frac{Ia}{bc^4}\left(1+\left(\frac{c}{b}\right)^3\right)} \tag{IV.23}$$

De même, pour une traction dans la direction normale ND de la mousse, on obtient en permutant le paramètre $c$ de l'équation (IV.22) avec $b$ :

$$\boxed{\frac{E^*_{ND}}{E} = \frac{16C}{B}\frac{Ic}{ab^4}\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^3\right)} \tag{IV.24}$$

*Remarque : les constantes $C$ et $B$ dépendent du choix spécifique de la cellule. Pour des morphologies de cellules similaires à celles présentées sur la figure IV.5 où les paramètres $a$, $b$ et $c$ jouent le même rôle, les constantes $C$ et $B$ sont identiques dans les trois directions. Les mêmes constantes de proportionnalité $C$ et $B$ sont utilisées dans les équations (IV.22), (IV.23) et (IV.24). Gibson et Ashby se servent aussi de la même constante $C$ entre les directions RD et TD dans (Gibson et Ashby, 1997, p.259-260).*

Soit $V_{Ni}$ et $V^*$, les volumes occupés respectivement par le nickel et la mousse. Dans le cas des poutres à section carrée $t \times t$, on a :

$$\begin{cases} V_{Ni} & \propto & t^2\,(a+b+c) \\ V^* & \propto & abc \end{cases} \tag{IV.25}$$

D'où

$$\frac{\rho^*}{\rho_{Ni}} = \frac{V_{Ni}}{V^*} \propto t^2\frac{a+b+c}{abc} \tag{IV.26}$$

Pour simplifier les expressions des modules de Young, la constante de proportionnalité entre la densité relative et les dimensions géométriques de la cellule est exprimée sous la forme $\left(\frac{1}{\sqrt{12C_\rho}}\right)$.

$$\boxed{\frac{\rho^*}{\rho_{Ni}} = \frac{t^2}{\sqrt{12C_\rho}}\frac{a+b+c}{abc} = \sqrt{\frac{I}{C_\rho}}\frac{a+b+c}{abc}} \tag{IV.27}$$

Dans le cas des poutres à section carrée, l'expression du module de Young dans la direction RD (équation (IV.22)) devient :

$$\frac{E^*_{RD}}{E} = \frac{16CC_\rho}{B}\frac{ab^3}{c^2\,(a+b+c)^2}\left[1+\left(\frac{c}{a}\right)^3\right]\left(\frac{\rho^*}{\rho_{Ni}}\right)^2 \tag{IV.28}$$

En posant les rapports d'anisotropie $R = \dfrac{b}{a}$ et $Q = \dfrac{c}{a}$, on obtient :

$$\boxed{\frac{E^*_{RD}}{E} = \left(\frac{16CC_\rho}{B}\right)\left[\frac{R^3\,(1+Q^3)}{Q^2\,(1+R+Q)^2}\right]\left(\frac{\rho^*}{\rho_{Ni}}\right)^2} \tag{IV.29}$$

De même, on obtient les expressions des modules de Young dans les directions TD et ND :

$$\frac{E^*_{TD}}{E} = \left(\frac{16CC_\rho}{B}\right)\left[\frac{R^3+Q^3}{R^2Q^2\left(1+R+Q\right)^2}\right]\left(\frac{\rho^*}{\rho_{Ni}}\right)^2 \quad \text{(IV.30)}$$

$$\frac{E^*_{ND}}{E} = \left(\frac{16CC_\rho}{B}\right)\left[\frac{Q^3\left(1+R^3\right)}{R^2\left(1+R+Q\right)^2}\right]\left(\frac{\rho^*}{\rho_{Ni}}\right)^2 \quad \text{(IV.31)}$$

Les modules de Young varient en fonction de la densité relative au carré. On retrouve donc la puissance 2, caractéristique du choix du mode de déformation par flexion des brins de la mousse.

Des équations (IV.29) et (IV.30), on peut aussi en déduire le rapport des modules de Young suivant :

$$\frac{E^*_{RD}}{E^*_{TD}} = R^2\left(\frac{1+\dfrac{1}{Q^3}}{\dfrac{1}{R^3}+\dfrac{1}{Q^3}}\right) \quad \text{(IV.32)}$$

*Remarque : si $Q = 1$, on retrouve bien le rapport donné par Gibson et Ashby dans (Gibson et Ashby, 1997, p.260)*

$$\frac{E^*_{RD}}{E^*_{TD}} = \frac{2R^2}{1+\dfrac{1}{R^3}} \quad \text{(IV.33)}$$

Avec les mêmes notations, les autres modules s'expriment de la manière suivante :

$$\frac{E^*_{TD}}{E^*_{ND}} = \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\dfrac{1}{Q^3}+\dfrac{1}{R^3}}{1+\dfrac{1}{R^3}}\right) \quad \text{(IV.34)}$$

$$\frac{E^*_{RD}}{E^*_{ND}} = \left(\frac{R}{Q}\right)^2\left(\frac{1+\dfrac{1}{Q^3}}{1+\dfrac{1}{R^3}}\right) \quad \text{(IV.35)}$$

### b) Modèle à force imposée (Reuss)

La même situation initiale qu'au paragraphe a) (page 94) est envisagée.
On appelle $M_a$, $M_b$ et $M_c$, les moments de flexion qui s'exercent sur les poutres de longueur $a$, $b$ et $c$.

Dans un premier temps, on considère que seules les forces $F_a$ et $F_c$ sont appliquées. Elles sont appliquées perpendiculairement au plan (TD, ND). Toutefois, dans cette section, on se place dans le cadre de la déformation de la mousse à force imposée (hypothèse de Reuss). La même force est donc appliquée sur tous les brins de la surface de la mousse. Les flèches des brins ne sont plus égales. Elles dépendent de leur longueur.

$$\begin{cases} F_a = F_c \\ \delta = \dfrac{a}{a+c}\delta_a + \dfrac{c}{a+c}\delta_c \end{cases} \quad \text{(IV.36)}$$

Et, on a toujours les équations suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned}
\delta_a &= \frac{M_a}{2EI}\left(\frac{a}{2}\right)^2 && \text{(IV.37)}\\
\delta_c &= \frac{M_c}{2EI}\left(\frac{c}{2}\right)^2 && \text{(IV.38)}\\
M_a &= F_a\,\frac{a}{2} && \text{(IV.39)}\\
M_c &= F_c\,\frac{c}{2} && \text{(IV.40)}\\
\varepsilon^* &= B\,\frac{\delta}{b} && \text{(IV.41)}\\
\sigma^* &= C\,\frac{F_a+F_c}{a\ c} && \text{(IV.42)}
\end{aligned}}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{a^3}{8\,(a+c)}\frac{M_a}{EI}+\frac{c^3}{8\,(a+c)}\frac{M_c}{EI} && \text{(IV.43)}\\
&= \frac{a^4}{16\,(a+c)}\frac{F_a}{EI}+\frac{c^4}{16\,(a+c)}\frac{F_c}{EI} && \text{(IV.44)}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon^* = \frac{B}{32CEI}\ \left(\frac{ac}{b}\right)\left(\frac{a^4+c^4}{a+c}\right)\ \sigma^* \qquad \text{(IV.45)}$$

Donc

$$\boxed{\frac{E^*_{RD}}{E} = \left(\frac{32C}{B}\right)\left(\frac{Ib}{ac}\right)\left(\frac{a+c}{a^4+c^4}\right)} \qquad \text{(IV.46)}$$

Lors d'une traction dans la direction transverse TD de la mousse, il vient que :

$$\boxed{\frac{E^*_{TD}}{E} = \left(\frac{32C}{B}\right)\left(\frac{Ia}{bc}\right)\left(\frac{b+c}{b^4+c^4}\right)} \qquad \text{(IV.47)}$$

Pour une traction dans la direction normale ND de la mousse, on a le résultat suivant :

$$\boxed{\frac{E^*_{ND}}{E} = \left(\frac{32C}{B}\right)\left(\frac{Ic}{ab}\right)\left(\frac{a+b}{a^4+b^4}\right)} \qquad \text{(IV.48)}$$

En supposant que les poutres sont à section carrée $t \times t$ et en utilisant l'équation (IV.27), on peut relier l'expression des modules de Young à la densité relative de la mousse.

On trouve :

$$\frac{E^*_{RD}}{E} = \left(\frac{32CC_\rho}{B}\right)\left[\frac{R^3Q\,(1+Q)}{(1+R+Q)^2\,(1+Q^4)}\right]\left(\frac{\rho^*}{\rho_{Ni}}\right)^2 \quad \text{(IV.49)}$$

$$\frac{E^*_{TD}}{E} = \left(\frac{32CC_\rho}{B}\right)\left[\frac{RQ\,(R+Q)}{(1+R+Q)^2\,(R^4+Q^4)}\right]\left(\frac{\rho^*}{\rho_{Ni}}\right)^2 \quad \text{(IV.50)}$$

$$\frac{E^*_{ND}}{E} = \left(\frac{32CC_\rho}{B}\right)\left[\frac{RQ^3\,(1+R)}{(1+R+Q)^2\,(1+R^4)}\right]\left(\frac{\rho^*}{\rho_{Ni}}\right)^2 \quad \text{(IV.51)}$$

De plus, à partir des équations (IV.49) et (IV.50), on peut en déduire le rapport des modules en fonction des rapports d'anisotropie $R$ et $Q$ :

$$\frac{E^*_{RD}}{E^*_{TD}} = R^2\left(\frac{1+\dfrac{1}{Q}}{1+\dfrac{R}{Q}}\right)\left(\frac{1+\left(\dfrac{R}{Q}\right)^4}{1+\left(\dfrac{1}{Q}\right)^4}\right) \quad \text{(IV.52)}$$

Pour les autres rapports de module de Young, on trouve :

$$\frac{E^*_{TD}}{E^*_{ND}} = \frac{R^3}{Q^5}\left(\frac{1+\dfrac{R}{Q}}{1+\dfrac{1}{R}}\right)\left(\frac{1+\dfrac{1}{R^4}}{1+\left(\dfrac{R}{Q}\right)^4}\right) \quad \text{(IV.53)}$$

$$\frac{E^*_{RD}}{E^*_{ND}} = \frac{R^5}{Q^5}\left(\frac{1+\dfrac{1}{Q}}{1+\dfrac{1}{R}}\right)\left(\frac{1+\dfrac{1}{R^4}}{1+\dfrac{1}{Q^4}}\right) \quad \text{(IV.54)}$$

**c) Comparaison entre le modèle analytique élastique anisotrope et les données expérimentales**

Le modèle fait apparaître une dépendance du module de Young vis-à-vis de la densité relative au carré. Or, expérimentalement, on a vu au paragraphe b) de la page 78 que les exposants (1,60 et 1,27) sont différents de la valeur 2 prédite par le modèle de flexion des brins de Gibson et Ashby.
Plusieurs facteurs peuvent expliquer cette différence. La précision obtenue sur les modules de Young n'est peut être pas suffisante par rapport à l'écart existant entre les valeurs des densités relatives. En effet, dans notre étude, les densités relatives sont peu nombreuses et leur gamme demeure peu étendue (entre 0,023 et 0,035). Gibson et Ashby s'intéressent à des mousses de densité relative allant de $10^{-2}$ à 1 ((Gibson et Ashby, 1997), p.192).
De plus, l'hypothèse faite sur le mécanisme de déformation des mousses est trop forte. En effet, les puissances inférieures à 2 indiquent que la flexion des brins n'est pas l'unique phénomène de déformation de la mousse mais un mélange de flexion et d'étirement des brins.
Il est aussi à noter que la puissance expérimentale trouvée lors d'un essai de traction suivant la direction RD de la mousse est différente de celle obtenue suivant la direction TD. Cette différence, bien qu'importante (de l'ordre de 0,3), est certainement due à une proportion différente des mécanismes de

déformation de la mousse (traction/flexion des brins) suivant le sens de sollicitation. Pour un étirement des brins, l'exposant vaut 1 tandis qu'il vaut 2 lors de la flexion ou la torsion des brins (Grenestedt, 1999). Roberts et al. (Roberts et Garboczi, 2002) trouve des exposants allant de 1,3 à 3 pour différentes structures numériques. Dans le cas de structures plus complexes comme le pain, l'exposant peut être supérieur à 2 (Liu et al., 2003). Dans notre étude, les brins sont donc plus sollicités en traction qu'en flexion lors d'un essai suivant la direction TD.

Cette différence entre la direction RD et TD de la mousse peut être mise en évidence à partir des résultats expérimentaux. A l'aide des équations (III.6), (IV.29) et (IV.30), on a :

$$\frac{E^*_{RD}}{E_{Ni}} = \frac{16CC_\rho}{B}\,\frac{R^3\left(1+Q^3\right)}{Q^2\left(1+R+Q\right)^2}\left(\frac{\rho^*}{\rho_{Ni}}\right)^2 = 2,03\left(\frac{\rho^*}{\rho_{Ni}}\right)^2 \tag{IV.55}$$

$$\frac{E^*_{TD}}{E_{Ni}} = \frac{16CC_\rho}{B}\,\frac{R^3+Q^3}{R^2Q^2\left(1+R+Q\right)^2}\left(\frac{\rho^*}{\rho_{Ni}}\right)^2 = 0,55\left(\frac{\rho^*}{\rho_{Ni}}\right)^2 \tag{IV.56}$$

Avec les valeurs des rapports d'anisotropie déterminés par tomographie aux rayons X ($R = b/a = 520/419 = 1,24$ ; $Q = c/a = 632/419 = 1,51$), la valeur du produit $\frac{CC_\rho}{B}$ peut être déduite :

- à partir du comportement suivant la direction RD, $\frac{CC_\rho}{B} = 0,48$ ;
- à partir du comportement suivant la direction TD, $\frac{CC_\rho}{B} = 0,32$.

Les deux valeurs du produit des constantes $\frac{CC_\rho}{B}$ sont différentes. L'incertitude expérimentale sur la détermination des modules de Young et sur la longueur moyenne des axes de l'ellipsoïde équivalent peuvent sans doute expliquer ce phénomène. Toutefois, les brins de la mousse étant plus courts suivant la direction TD (de l'ordre de 20 %), les mécanismes de déformation ne sont certainement pas les mêmes. La proportion de brins en flexion lorque la mousse est sollicitée suivant la direction RD par rapport à la direction TD peut aussi expliquer la différence enregistrée au niveau du produit des constantes $\frac{CC_\rho}{B}$.

On a vu que deux expressions non équivalentes peuvent être déduites suivant l'hypothèse que l'on fait (Voigt ou Reuss). A partir du choix particulier de la cellule de la figure IV.5b, on a pour la direction RD :

$$\left(\frac{E^*_{RD}}{E}\right)_{Voigt} = \frac{16C}{B}\frac{Ib}{ac}\left(\frac{1}{c^3}+\frac{1}{a^3}\right) \tag{IV.57}$$

$$\left(\frac{E^*_{RD}}{E}\right)_{Reuss} = \frac{32C}{B}\frac{Ib}{ac}\left(\frac{a+c}{a^4+c^4}\right) \tag{IV.58}$$

En prenant les valeurs de $a$ ($= 0,419$ mm), $b$ ($= 0,52$ mm) et $c$ ($= 0,632$ mm), déterminées au premier chapitre par tomographie aux rayons X (voir paragraphe f), page 17), on trouve que :

$$\left(\frac{E^*_{RD}}{E}\right)_{Voigt} = 551\ \frac{CI}{B} \tag{IV.59}$$

$$\left(\frac{E^*_{RD}}{E}\right)_{Reuss} = 347\ \frac{CI}{B} \tag{IV.60}$$

L'ordre de l'inégalité entre Voigt et Reuss est bien respecté : ${E^*_{RD}}^{Voigt} > {E^*_{RD}}^{Reuss}$

De plus, à partir des expressions des rapports des modules de Young à déformation ou à force imposées, et des valeurs des rapports d'anisotropie issus des expériences de tomographie aux rayons X, on en déduit que :

$$\left(\frac{E^*_{RD}}{E^*_{TD}}\right)_{Voigt} = 2,44 \tag{IV.61}$$

$$\left(\frac{E^*_{RD}}{E^*_{TD}}\right)_{Reuss} = 1,72 \tag{IV.62}$$

Or, expérimentalement, à partir de la détermination directe des modules, on trouve que (voir tableau III.4) :

$$\frac{E^*_{RD}}{E^*_{TD}} = 2,95 \pm 0,3 \tag{IV.63}$$

L'expérience se situe plus près de la description de Voigt que de celle de Reuss. Le modèle de Voigt, utilisée par Gibson et Ashby (Gibson et Ashby, 1997), est développé dans la suite de ce chapitre.

## IV.3 Modèle élastoplastique – cellule anisotrope

Dans leur modèle, Gibson et Ashby considèrent le comportement élastique puis plastique des poutres constituant la cellule. Cela permet de décrire la partie linéaire élastique du début de la courbe de traction des mousses de nickel et la partie droite, de pente le module plastique, en fin de traction. La partie non-linéaire de la courbe de traction n'est donc pas décrite. La même démarche que celle employée par Gibson et Ashby dans (Gibson et Ashby, 1997) est reprise dans ce travail mais le comportement de la poutre est considéré comme élastoplastique. Ainsi, on obtient une description entière du comportement mécanique global de la mousse. Comme dans le modèle de Gibson et Ashby, la flexion des brins des cellules est considérée comme le principal (ici unique) mécanisme de déformation de la mousse. La mousse se résume alors à un assemblage quasi-périodique de cellules élémentaires. On se place dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations et dans l'hypothèse de Voigt. Dans cette section, la forme explicite de la cellule représentative de la mousse n'est toujours pas considérée. La même approche qu'au paragraphe IV.2.3 est effectuée.

### IV.3.1 Flexion élastoplastique d'un brin de la mousse

L'analyse de la poutre en flexion simple est reprise dans le cas où le matériau est élastoplastique écrouissable. Soit $H$ le module d'écrouissage du matériau de base. On suppose que le matériau suit les lois de comportement ci-dessous. Il peut être décrit par un critère $f$ de von Mises et une loi d'écrouissage isotrope linéaire :

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\varepsilon} &= \underset{\sim}{\varepsilon}^e + \underset{\sim}{\varepsilon}^p && \text{(IV.64)}\\
f(\underset{\sim}{\sigma}) &= J_2(\underset{\sim}{\sigma}) - \sigma_y = \sqrt{\frac{3}{2}\underset{\sim}{\sigma}^{\mathrm{dev}} : \underset{\sim}{\sigma}^{\mathrm{dev}}} - \sigma_y && \text{(IV.65)}\\
\sigma_y &= \sigma_0 + Hp && \text{(IV.66)}\\
\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p &= \dot{p}\,\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} && \text{(IV.67)}
\end{aligned}$$

où $\underset{\sim}{\sigma}^{\mathrm{dev}}$ est le déviateur des contraintes,
$p$ la déformation plastique cumulée

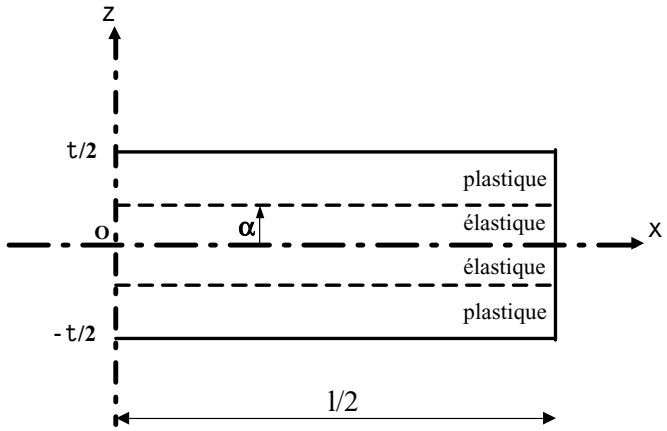



**Figure IV.6** : Coupe d'une poutre de demi-longueur $l/2$.

Soit $M_p$ le moment où la plasticité débute dans la poutre.

$$M_p = \frac{\sigma_0 t^3}{6} \tag{IV.68}$$

Lorsque la charge augmente au-delà de $M_p$, la plasticité envahit peu à peu la poutre. On distingue alors un cœur élastique $|z| \leq \alpha$ et une zone plastique $|z| \geq \alpha$ comme sur la figure IV.6.

$$\forall z \in [-\alpha; \alpha], \quad \sigma_{xx} = kz \tag{IV.69}$$

$$\forall |z| \geq \alpha, \quad |\sigma_{xx}| = \sigma_0 + Hp \quad \text{avec } p = |\varepsilon^p_{xx}| \tag{IV.70}$$

La variable $p$ associée à la variable d'écrouissage $\sigma_y$ s'identifie à la vitesse de déformation plastique équivalente. Elle est appelée la déformation plastique cumulée et mesure la longueur du trajet de déformation.

La continuité des contraintes en $\alpha$ donne la valeur de k.

$$\boxed{k = \frac{\sigma_0}{\alpha}} \tag{IV.71}$$

De plus, les sections droites restent droites (*i*.e. $\varepsilon_{xx}$ reste linéaire en $z$) et les déformations sont continues en $\alpha$ :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_0}{E\alpha} z \tag{IV.72}$$

On peut alors en déduire la valeur de $\varepsilon^p_{xx}$.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_0}{E\alpha} z = \varepsilon^p_{xx} + \varepsilon^e_{xx} = \varepsilon^p_{xx} + \frac{\sigma_{xx}}{E} = \varepsilon^p_{xx} + \frac{\sigma_0 + H|\varepsilon^p_{xx}|}{E} \tag{IV.73}$$

$$\boxed{\varepsilon^p_{xx} = \frac{\sigma_0/E}{1 + H/E}\left(\frac{z}{\alpha} - 1\right)} \qquad \text{pour } z \geq \alpha \tag{IV.74}$$

$$\boxed{\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{1 + H/E}\left(1 + \frac{H}{E}\frac{z}{\alpha}\right)} \qquad \text{pour } z \geq \alpha \tag{IV.75}$$

Maintenant que l'on connaît $\sigma_{xx}$, on peut calculer l'expression du moment appliqué $M$ en fonction de la profondeur de la zone plastique $\alpha$.

$$\begin{aligned} M &= \int_{-t/2}^{t/2}\int_{-t/2}^{t/2} \sigma z \, dy \, dz = 2t \int_0^{t/2} \sigma z \, dz \\ &= 2t \int_0^{\alpha} \frac{\sigma_0}{\alpha} z^2 \, dz + 2t \int_{\alpha}^{t/2} \frac{\sigma_0}{1+H/E} \left( z + \frac{H}{E}\frac{z^2}{\alpha} \right) dz \\ &= 2t\sigma_0 \left[ -\frac{\alpha^2}{6\,(1+H/E)} + \left(\frac{t}{2}\right)^2 \frac{1}{1+H/E} \left( \frac{1}{2} + \frac{H}{E\alpha}\frac{t}{6} \right) \right] \end{aligned} \tag{IV.76}$$

En posant $\alpha^* = \dfrac{\alpha}{t/2}$, on a :

$$\boxed{M = \frac{\sigma_0 E t^3}{12(E+H)} \left( 3 - \alpha^{*2} + \frac{2H}{E\alpha^*} \right)} \tag{IV.77}$$

On peut remarquer que la poutre élastoplastique linéaire peut accommoder n'importe quel moment appliqué $M$, contrairement à la poutre parfaitement plastique pour laquelle il existe une charge limite. Lorsque $M$ tend vers l'infini, $\alpha^*$ tend vers 0. Dans le cas de la poutre parfaitement plastique ($\dfrac{H}{E} = 0$), lorsque $M$ tend vers l'infini, il existe une charge limite donnée pour $\alpha^* = 0$. La valeur limite du moment de flexion de la poutre plastique pure est :

$$M_\infty = \frac{3M_p}{2} = \frac{\sigma_0 t^3}{4} \tag{IV.78}$$

Au-delà de $M_\infty$, la poutre plastique pure se comporte comme une "rotule plastique".

Soit $\delta^p$ la flèche résiduelle lorsque la charge $M$ est relâchée. En raison de la déformation plastique de la poutre lors de la charge, il subsiste une flêche $\delta^p$ à la décharge, liée à la courbure plastique de la poutre. Pour déterminer $\delta^p$, on suppose que la décharge est élastique, hypothèse qui sera vérifiée *a posteriori*. On utilise alors le principe de superposition en disant que le champ de déplacement $u_z$ final à la décharge est égal à la somme du déplacement obtenu en charge maximale $M$ et du déplacement dû à la réponse élastique de la poutre à l'application du moment $(-M)$ :

$$u_z^{final}(x,z) = u_z^{charge}(x,z) + u_z^{décharge}(x,z) \tag{IV.79}$$

$$\delta^p = u_z^{final}(x=0, z=0) \tag{IV.80}$$

D'après les équations (IV.72) et (IV.74), on a pour $z \geq \alpha$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{\sigma_0}{E}\frac{z}{\alpha} \\ \varepsilon_{xx}^p &= \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^e = \frac{\sigma_0}{E+H}\left(\frac{z}{\alpha} - 1\right) \end{aligned} \tag{IV.81}$$

Pour les déformations suivant l'axe $z$, on a :

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e + \varepsilon_{zz}^p \quad \text{avec} \begin{cases} \varepsilon_{zz}^e &= -\nu\varepsilon_{xx}^e \\ \varepsilon_{zz}^p &= -\dfrac{\varepsilon_{xx}^p}{2} \end{cases} \tag{IV.82}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu\sigma_0}{E} - \frac{\sigma_0}{E+H}\left(\frac{z}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu H}{E}\right) \tag{IV.83}$$

D'où, avec les conditions aux limites $u_z(x = l/2, z = 0) = u_x(x = l/2, z = 0) = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} u_x &= \dfrac{\sigma_0}{E\alpha}\, xz \\ u_z &= -\dfrac{\nu\sigma_0}{2E}\,\dfrac{z^2}{\alpha} \;+\; \dfrac{\sigma_0}{2E\alpha}\left(\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 - x^2\right) \end{cases} \tag{IV.84}$$

La flèche résiduelle s'exprime alors comme :

$$\delta^p = \left(\frac{\sigma_0}{2E\alpha} - \frac{M}{2EI}\right)\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_0}{E\alpha^* t} - \frac{M}{2EI}\right)\left(\frac{l}{2}\right)^2 \tag{IV.85}$$

En injectant l'expression du moment (équation (IV.77)) dans l'équation précédente, on obtient :

$$\delta^p = \frac{\sigma_0}{E}\left(\frac{l}{2}\right)^2\left[\frac{1}{\alpha^* t} - \frac{Et^3}{24\,(E+H)\,I}\left(3 - \alpha^{*2} + \frac{2H}{E\alpha^*}\right)\right] \tag{IV.86}$$

Pour une poutre à section carrée, on trouve :

$$\boxed{\delta^p = \frac{\sigma_0}{2t\,(E+H)}\left(\frac{l}{2}\right)^2\left(\alpha^{*2} - 3 + \frac{2}{\alpha^*}\right)} \tag{IV.87}$$

### IV.3.2 Règles de changement d'échelle

Comme pour le cas du modèle élastique, des règles de changement d'échelle sont nécessaires au passage des mécanismes de déformation microscopiques à l'échelle du brin au comportement macroscopique de la mousse. Le choix des constantes $C$, reliant la contrainte macroscopique de la mousse à la force exercée sur la poutre, et $B$, réalisant la transition entre la déformation macroscopique de la mousse et la flèche microscopique des poutres, est conservé. Toutefois, une constante $B^p$ est ajoutée. Elle assure la liaison entre la déformation plastique de la mousse et la flèche plastique au niveau de la poutre.

Lors d'un essai dans la direction RD, on a donc :

$$\begin{cases} \sigma^* &= C\,\dfrac{F_a + F_c}{ac} \\ \varepsilon^{p*} &= B^p\,\dfrac{\delta^p}{b} \end{cases} \tag{IV.88}$$

### IV.3.3 Modèle de déformation élastoplastique de la mousse par flexion des brins

La même démarche que celle employée dans le cas élastique (voir section IV.2.3) est appliquée ici. Trois familles de poutres de longueurs différentes ($a$, $b$ et $c$) à section carrée $t \times t$ sont considérées. Les poutres de longueur $a$, $b$ et $c$ sont supposées être orientées respectivement suivant la direction transverse TD, la direction de défilement RD, et la direction normale ND de la mousse.

Soit $F_a$, $F_b$ et $F_c$ les forces qui s'appliquent respectivement au milieu de chaque poutre de longueur $a$, $b$ et $c$ ; et $M_a$, $M_b$ et $M_c$, les moments de flexion associés. Pour permettre une meilleure visualisation des équations, on peut se référer à l'exemple de cellule anisotrope de la figure IV.5a. Le but du modèle est de trouver l'expression reliant $\sigma^*$ et $\varepsilon^*$.

### a) Sollicitation dans la direction de défilement RD de la mousse

Dans un premier temps, on s'intéresse à un essai de traction suivant la direction RD de la mousse. Le plan (TD, ND) n'est constitué que des poutres de longueur $a$ et $c$. Seules les forces $F_a$ et $F_c$ sont donc à prendre en compte lors de la sollicitation suivant la direction RD.

On a donc les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sigma^* & = & C\,\dfrac{F_a+F_c}{ac} = \dfrac{2C}{ac}\left(\dfrac{M_a}{a}+\dfrac{M_c}{c}\right) \\ M_a & = & \dfrac{\sigma_0 E t^3}{12(E+H)}\left(3-\alpha_a^{*2}+\dfrac{2H}{E\alpha_a^*}\right) \\ M_c & = & \dfrac{\sigma_0 E t^3}{12(E+H)}\left(3-\alpha_c^{*2}+\dfrac{2H}{E\alpha_c^*}\right) \end{array}\right. \tag{IV.89}$$

On peut donc exprimer la contrainte macroscopique $\sigma^*$ de la mousse en fonction des profondeurs plastiques normalisées ($\alpha_a^*$ ; $\alpha_c^*$) dans les poutres de longueur $a$ et $c$.

$$\boxed{\sigma^* = \frac{CE\sigma_0}{6\,(E+H)}\left(\frac{t}{a}\right)^2\left(\frac{t}{c}\right)\left[3-\alpha_a^{*2}+\frac{2H}{E\alpha_a^*}+\left(\frac{a}{c}\right)\left(3-\alpha_c^{*2}+\frac{2H}{E\alpha_c^*}\right)\right]} \tag{IV.90}$$

Il ne reste donc plus qu'à établir une relation entre la déformation macroscopique des mousses $\varepsilon^*$ et les profondeurs plastiques normalisées ${\alpha_a}^*$ et ${\alpha_c}^*$. Pour cela, on décompose la déformation macroscopique globale de la mousse en sa partie élastique et plastique.

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon^* & = & \varepsilon^{e*}+\varepsilon^{p*} \\ & = & \dfrac{\sigma^*}{E_{RD}^*}+B^p\,\dfrac{\delta^p}{b} \end{array} \tag{IV.91}$$

Afin de simplifier les expressions, on suppose que les flèches plastiques ${\delta_a}^p$ et ${\delta_c}^p$ dans les poutres de longueur $a$ et $c$ sont égales, et identiques à la flèche plastique totale $\delta^p$. Cette hypothèse revient à celle de Voigt si l'on néglige la partie élastique. On choisit alors d'exprimer la flèche plastique totale comme la somme des deux flèches plastiques ${\delta_a}^p$ et ${\delta_c}^p$ pour conserver une symètrie dans les expressions.

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma^*}{E_{RD}^*}+\frac{B^p}{2b}\left({\delta_a}^p+{\delta_c}^p\right) \tag{IV.92}$$

A l'aide de l'expression de la flèche résiduelle (équation (IV.87)) et de la contrainte $\sigma^*$ (équation (IV.90)) en fonction des profondeurs plastiques normalisées, on en déduit la relation entre la déformation $\varepsilon^*$ et les profondeurs plastiques normalisées $\alpha_a^*$ et $\alpha_c^*$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{E+H}{\sigma_0}\right)\varepsilon^* = & -\alpha_a^{*2}\left[\frac{CE}{6E_{RD}^*}\left(\frac{t}{a}\right)^2\left(\frac{t}{c}\right)-\frac{B^p}{16}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{t}\right)\right]-\alpha_c^{*2}\left[\frac{CE}{6{E_{RD}}^*}\left(\frac{t}{a}\right)\left(\frac{t}{c}\right)^2-\frac{B^p}{16}\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{t}\right)\right] \\ & +3\left[\frac{CE}{6E_{RD}^*}\left(\frac{t}{a}\right)^2\left(\frac{t}{c}\right)-\frac{B^p}{16}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{t}\right)+\frac{CE}{6{E_{RD}}^*}\left(\frac{t}{a}\right)\left(\frac{t}{c}\right)^2-\frac{B^p}{16}\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{t}\right)\right] \\ & +\frac{2}{{\alpha_a}^*}\left[\frac{CE}{6E_{RD}^*}\left(\frac{H}{E}\right)\left(\frac{t}{a}\right)^2\left(\frac{t}{c}\right)+\frac{B^p}{16}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{t}\right)\right] \\ & +\frac{2}{{\alpha_c}^*}\left[\frac{CE}{6E_{RD}^*}\left(\frac{H}{E}\right)\left(\frac{t}{a}\right)\left(\frac{t}{c}\right)^2+\frac{B^p}{16}\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{t}\right)\right] \end{aligned} \tag{IV.93}$$

En remodelant l'équation IV.93, on obtient une équation du troisième degré en $\alpha_a^*$ et $\alpha_c^*$.

$$\boxed{\alpha_a^{*2}\mathcal{A}_{RD} + \alpha_c^{*2}\mathcal{B}_{RD} \quad + \quad \left[\frac{E+H}{\sigma_0}\,\varepsilon^* - 3\left(\mathcal{A}_{RD}+\mathcal{B}_{RD}\right)\right] + \frac{1}{\alpha_a{}^*}\left[-\frac{2H}{E}\mathcal{A}_{RD} - \frac{B^p\left(E+H\right)}{8ER}\left(\frac{a}{t}\right)\right] + \frac{1}{\alpha_c{}^*}\left[-\frac{2H}{E}\mathcal{B}_{RD} - \frac{B^p\left(E+H\right)Q}{8ER}\left(\frac{c}{t}\right)\right] = 0}$$

avec

$$\boxed{\mathcal{A}_{RD} = \frac{CE}{6E_{RD}^*}\left(\frac{t}{a}\right)^2\left(\frac{t}{c}\right) - \frac{B^p}{16R}\left(\frac{a}{t}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{B}_{RD} = \frac{CE}{6E_{RD}^*}\left(\frac{t}{a}\right)\left(\frac{t}{c}\right)^2 - \frac{B^pQ}{16R}\left(\frac{c}{t}\right)} \tag{IV.94}$$

*Rappel : la définition des rapports d'anisotropie $R$ et $Q$ reste inchangée. On a toujours : $R = \dfrac{b}{a}$ et $Q = \dfrac{c}{a}$.*

Pour résoudre complètement notre problème, une deuxième équation liant les profondeurs plastiques normalisées $\alpha_a^*$ et $\alpha_c^*$ est nécessaire. Cette deuxième équation est donnée en supposant l'égalité des flèches plastiques dans les brins de longueur $a$ et $c$. Dans le régime plastique, on impose la condition $\delta_a^p = \delta_c^p = \delta^p$, ce qui revient à l'hypothèse de Voigt si l'on néglige la partie élastique. Ce choix est effectué pour simplifier l'expression de l'équation (IV.95).

$$\begin{aligned}
\delta^p = \delta_a^p = \delta_c^p \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\sigma_0}{2t\left(E+H\right)}\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\alpha_a^{*2} - 3 + \frac{2}{\alpha_a^*}\right) = \frac{\sigma_0}{2t\left(E+H\right)}\left(\frac{c}{2}\right)^2\left(\alpha_c^{*2} - 3 + \frac{2}{\alpha_c^*}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad \alpha_a^{*2} - 3 + \frac{2}{\alpha_a^*} - \left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\alpha_c^{*2} - 3 + \frac{2}{\alpha_c^*}\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \boxed{\alpha_a^{*2} - Q^2\alpha_c^{*2} + \frac{2}{\alpha_a^*} - \frac{2Q^2}{\alpha_c^*} - 3\left(1-Q^2\right) = 0}
\end{aligned} \tag{IV.95}$$

Il suffit donc de résoudre le système des deux équations (IV.94) et (IV.95) du troisième degré à deux inconnues $(\alpha_a^*;\alpha_c^*)$ pour en déduire l'expression de $\sigma^*$ à partir de l'équation (IV.90). Le système des deux équations est résolu numériquement par la méthode de Newton–Raphson. Pour chaque valeur de $\varepsilon^*$, on en déduit les valeurs des profondeurs plastiques normalisées $\alpha_a^*$ et $\alpha_c^*$ dans les poutres. En injectant cette valeur dans l'équation (IV.90), on obtient la valeur de la contrainte macroscopique $\sigma^*$. On est donc capable de donner pour chaque valeur $\varepsilon^*$ de la mousse, la valeur de la contrainte associée $\sigma^*$.

### b) Sollicitation dans la direction transversale TD de la mousse

Si l'on change la sollicitation de la mousse, toutes les équations restent identiques. Il suffit juste de permuter les indices des poutres. Par exemple, pour une sollicitation suivant la direction transverse TD de la mousse, la force macroscopique ne s'appuie que sur les poutres de longueurs $b$ et $c$. Une permutation des paramètres $a$ par $b$ (et vice-versa) permet de trouver les équations qui régissent le comportement mécanique des mousses lors d'un essai de traction suivant la direction transverse. Pour une traction suivant la direction normale ND de la mousse, il faudrait permuter les paramètres $b$ et $c$.

Il est alors aisé d'écrire les équations pour un essai de traction suivant la direction transverse TD de la mousse.
On trouve :

$$\sigma^* = \frac{CE\sigma_0}{6\left(E+H\right)}\left(\frac{t}{b}\right)^2\left(\frac{t}{c}\right)\left[3 - \alpha_b^{*2} + \frac{2H}{E\alpha_b^*} + \left(\frac{b}{c}\right)\left(3 - \alpha_c^{*2} + \frac{2H}{E\alpha_c^*}\right)\right] \tag{IV.96}$$

$$\begin{aligned}{\alpha_b}^{*2}\mathcal{A}_{TD}+{\alpha_c}^{*2}\mathcal{B}_{TD} \quad + \quad & \left[\frac{E+H}{\sigma_0}\varepsilon^* - 3\left(\mathcal{A}_{TD}+\mathcal{B}_{TD}\right)\right] + \frac{1}{{\alpha_b}^*}\left[-\frac{2H}{E}\mathcal{A}_{TD} - \frac{B^p\left(E+H\right)R}{8E}\left(\frac{b}{t}\right)\right] \\ & + \frac{1}{{\alpha_c}^*}\left[-\frac{2H}{E}\mathcal{B}_{TD} - \frac{B^p\left(E+H\right)Q}{8E}\left(\frac{c}{t}\right)\right] = 0\end{aligned} \tag{IV.97}$$

$$R^2{\alpha_b}^{*2} - Q^2{\alpha_c}^{*2} + \frac{2R^2}{{\alpha_b}^*} - \frac{2Q^2}{{\alpha_c}^*} - 3\left(R^2-Q^2\right) = 0 \tag{IV.98}$$

avec

$$\boxed{\mathcal{A}_{TD} = \frac{CE}{6E^*_{TD}}\left(\frac{t}{b}\right)^2\left(\frac{t}{c}\right) - \frac{B^{pR}}{16}\left(\frac{b}{t}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{B}_{TD} = \frac{CE}{6E^*_{TD}}\left(\frac{t}{b}\right)\left(\frac{t}{c}\right)^2 - \frac{B^pQ}{16}\left(\frac{c}{t}\right)} \tag{IV.99}$$

### IV.3.4 Expression de la limite d'élasticité $\sigma_0^*$ de la mousse

#### a) Sollicitation dans la direction de défilement RD de la mousse

La limite d'élasticité est la valeur de $\sigma^*$ lorsqu'on est à la frontière entre le domaine élastique et plastique. La limite d'élasticité $\sigma^*_{0\,RD}$ dans la direction de défilement de la mousse peut donc être déduite de l'équation (IV.90) avec ${\alpha_a}^* = 1$ et ${\alpha_c}^* = 1$.

$$\boxed{\frac{\sigma^*_{0\,RD}}{\sigma_0} = \frac{C}{3}\left(\frac{t}{a}\right)^2\left(\frac{t}{c}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)} \tag{IV.100}$$

On peut exprimer la section $t$ des poutres en fonction de la densité relative à partir de l'équation (IV.27).

$$t^3 = \left(12C_\rho\right)^{3/4}\left(\frac{abc}{a+b+c}\right)^{3/2}\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^{3/2} \tag{IV.101}$$

On trouve alors pour la limite d'élasticité :

$$\frac{\sigma^*_{0\,RD}}{\sigma_0} = \frac{\left(12C_\rho\right)^{3/4}C}{3}\left[\frac{R^{3/2}\left(1+Q\right)}{Q^{1/2}\left(1+R+Q\right)^{3/2}}\right]\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^{3/2} \tag{IV.102}$$

On retrouve bien la dépendance à la puissance (3/2) pour la limite d'élasticité prédite par Gibson et Ashby.

#### b) Sollicitation dans la direction transverse TD de la mousse

La limite d'élasticité de la mousse pour une sollicitation suivant la direction transverse est égale à :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\sigma^*_{0\,TD}}{\sigma_0} &= \frac{C}{3}\left(\frac{t}{b}\right)^2\left(\frac{t}{c}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right) \\ &= \frac{\left(12C_\rho\right)^{3/4}C}{3}\left[\frac{R+Q}{\left(RQ\right)^{1/2}\left(1+R+Q\right)^{3/2}}\right]\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^{3/2}\end{aligned}} \tag{IV.103}$$

On peut alors déduire l'expression du rapport des limites d'élasticité de la mousse en fonction des paramètres géométriques $R$ et $Q$.

$$\frac{\sigma^*_{0\,RD}}{\sigma^*_{0\,TD}} = R^2 \frac{1+Q}{R+Q} \tag{IV.104}$$

*Remarque : on retrouve bien les formules données par Gibson et Ashby pour $c = a$,* i.*e. pour $Q = 1$.*

$$\frac{\sigma^*_{0\,RD}}{\sigma^*_{0\,TD}} = \frac{2R^2}{1+R} \tag{IV.105}$$

### c) Confrontation expérimentale

Expérimentalement, la limite d'élasticité de la mousse peut s'exprimer si l'on impose la puissance 3/2 :

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma^*_{0\,RD}}{\sigma_0} &= 1,1 \left(\dfrac{\rho^*}{\rho}\right)^{3/2} \\ \dfrac{\sigma^*_{0\,TD}}{\sigma_0} &= 0,39 \left(\dfrac{\rho^*}{\rho}\right)^{3/2} \end{cases}$$

A partir des rapports d'anisotropie $R$ et $Q$, identifiés par tomographie aux rayons X, et des équations (IV.102) et (IV.103), on peut trouver la valeur du produit $(12C_\rho)^{3/4}\,C$.

- à partir de la direction RD, on trouve : $(12C_\rho)^{3/4}\,C = 8,5$ ;
- à partir de la direction TD, on trouve : $(12C_\rho)^{3/4}\,C = 4,2$.

Les valeurs différentes du produit $(12C_\rho)^{3/4}\,C$ montrent que le modèle n'est pas complètement satisfaisant. De plus, les limites d'élasticité expérimentales, déterminées à 0,2 %, sont, dans le cas des mousses, éloignées des limites d'élasticité "réelle". Elles sont donc différentes de celles considérées dans le modèle.

## IV.3.5 Expression du module plastique $H^*$ de la mousse

### a) Sollicitation dans la direction de défilement RD de la mousse

Soit $M_{0a}$ et $M_{0c}$, les moments $M_a$ et $M_c$ lorsque les poutres sont totalement plastifiées (*i*.e. lorsque les valeurs de $\alpha^*_a$ et $\alpha^*_c$ sont proches de zéro).

D'après l'expression (IV.77), on obtient pour $(\alpha^*_a \to 0)$ et $(\alpha^*_c \to 0)$ :

$$\begin{cases} M_{0a} \simeq \dfrac{\sigma_0 E t^3}{12(E+H)} \left(3 + \dfrac{2H}{E\alpha^*_a}\right) \\ M_{0c} \simeq \dfrac{\sigma_0 E t^3}{12(E+H)} \left(3 + \dfrac{2H}{E\alpha^*_c}\right) \end{cases} \tag{IV.106}$$

D'où

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha^*_a} \simeq \dfrac{6\,(E+H)\,M_{0a}}{\sigma_0 H t^3} - \dfrac{3E}{2H} \\ \dfrac{1}{\alpha^*_c} \simeq \dfrac{6\,(E+H)\,M_{0c}}{\sigma_0 H t^3} - \dfrac{3E}{2H} \end{cases} \tag{IV.107}$$

A partir de l'équation (IV.87), on a pour $(\alpha_a^* \to 0)$ et $(\alpha_c^* \to 0)$ :

$$\begin{cases} \delta_a^p &= \dfrac{\sigma_0}{2t\,(E+H)} \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \left(\dfrac{2}{\alpha_a^*} - 3\right) \\ \delta_c^p &= \dfrac{\sigma_0}{2t\,(E+H)} \left(\dfrac{c}{2}\right)^2 \left(\dfrac{2}{\alpha_c^*} - 3\right) \end{cases} \tag{IV.108}$$

En substituant l'expression des profondeurs plastiques normalisées dans les équations des flèches plastiques, on obtient la formule des moments pratiquement totalement plastifiés en fonction de la flèche.

$$\begin{cases} M_{0_a} \simeq \dfrac{\sigma_0 t^3}{4} + \dfrac{2t^4 H}{3a^2}\delta_a^p \\ M_{0_c} \simeq \dfrac{\sigma_0 t^3}{4} + \dfrac{2t^4 H}{3c^2}\delta_c^p \end{cases} \tag{IV.109}$$

On peut donc exprimer la contrainte $\sigma^*$ de la mousse. En supposant que les flèches plastiques sont identiques $(\delta_a^p = \delta_c^p = \delta^p = \dfrac{b\,\varepsilon^{*p}}{B^p})$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma^* &\simeq \frac{2C}{ac}\left[\frac{M_{0_a}}{a} + \frac{M_{0_c}}{c}\right] \\ &\simeq \frac{C\sigma_0 t^3\,(a+c)}{2a^2c^2} + \frac{4CHt^4 b\,(a^3+c^3)}{3B^p a^4 c^4}\,\varepsilon^{*p} \end{aligned} \tag{IV.110}$$

En identifiant l'équation précédente à $\sigma^* = \sigma_0^* + H^*\varepsilon^{*p}$, on en déduit l'expression du module plastique de la mousse. Il en résulte que :

$$\boxed{\frac{H_{RD}^*}{H} = \frac{4C}{3B^p}\left(\frac{t^4}{c}\right)\left(\frac{b}{a}\right)\left[1 + \left(\frac{c}{a}\right)^3\right]} \tag{IV.111}$$

*Remarque : la limite d'élasticité de la mousse n'est pas identifiée à partir de l'équation (IV.110) car cette méthode asymptotique n'est valable que loin du régime élastique (pour $\alpha_a^* \to 0$) et ($\alpha_c^* \to 0$).*

En exprimant le rapport des modules plastiques en fonction de la densité relative, on obtient :

$$\frac{H_{RD}^*}{H} = \frac{16CC_\rho}{B^p}\left[\frac{R^3\,(1+Q^3)}{Q^2\,(1+R+Q)^2}\right]\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2 \tag{IV.112}$$

On peut remarquer que le module plastique dépend bien de la densité relative de la mousse à la puissance 2.

### b) Sollicitation dans la direction transverse TD de la mousse

Par analogie (permutation des longueurs $a$ et $b$), la formule du module plastique dans la direction transverse s'écrit :

$$\boxed{\frac{H_{TD}^*}{H} = \frac{4C}{3B^p}\left(\frac{t^4}{c}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left[1 + \left(\frac{c}{b}\right)^3\right]} \tag{IV.113}$$

En exprimant le rapport des modules plastiques en fonction de la densité relative, on obtient :

$$\frac{H^*_{TD}}{H} = \frac{16CC_\rho}{B^p}\left[\frac{R^3+Q^3}{R^2Q^2\left(1+R+Q\right)^2}\right]\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2 \tag{IV.114}$$

On peut donc en déduire le rapport des modules plastiques.

$$\boxed{\frac{H^*_{RD}}{H^*_{TD}} = R^2\frac{1+\dfrac{1}{Q^3}}{\dfrac{1}{R^3}+\dfrac{1}{Q^3}}} \tag{IV.115}$$

*Remarque : comme dans (Gibson et Ashby, 1997), le même rapport pour les modules plastiques et les modules de Young est trouvé.*

$$\frac{H^*_{RD}}{H^*_{TD}} = \frac{E^*_{RD}}{E^*_{TD}} \tag{IV.116}$$

*De plus, si $Q = 1$, le rapport des modules plastiques dégénère suivant la formule établie par Gibson et Ashby.*

### c) Confrontation expérimentale

Expérimentalement, on a vu que :

$$\begin{cases} \dfrac{H^*_{RD}}{H_{Ni}} &= 3,1\left(\dfrac{\rho^*}{\rho}\right)^2 \\ \dfrac{H^*_{TD}}{H_{Ni}} &= 1,22\left(\dfrac{\rho^*}{\rho}\right)^2 \end{cases}$$

A partir des rapports d'anisotropie $R$ et $Q$, identifiés par tomographie aux rayons X, et des équations (IV.112) et (IV.114), on peut trouver la valeur du rapport $\dfrac{CC_\rho}{B^p}$.

- à partir de la direction RD, on trouve : $\dfrac{CC_\rho}{B^p} = 0,73$ ;
- à partir de la direction TD, on trouve : $\dfrac{CC_\rho}{B^p} = 0,70$.

Les deux rapports des constantes, calculés à partir des directions RD et TD, donnent la même valeur. Les données expérimentales sont donc cohérentes avec le modèle analytique. Cette bonne précision des valeurs expérimentales provient de la détermination plus aisée du module plastique. En effet, sa valeur est moins soumise à l'erreur : le domaine plastique linéaire s'étend sur un domaine plus large.

### d) Implémentation du modèle anisotrope élastoplastique dans ZeBuLoN

Toutes les formules du modèle ont été écrites dans des programmes (.z) compréhensibles par le pré-processeur ZebFront du code ZeBuLoN. Le pré-processeur ZebFront permet d'hériter de toutes les classes de comportement des matériaux définies dans ZeBuLoN et de simplifier la programmation. Les programmes sont donnés en Annexe E.

Tous les fichiers possèdent la même architecture : création de classes et écritures des formules dans le domaine élastique puis plastique. La classe "`NEWTON_RAPHSON`" permet de résoudre les équations du troisième degré tandis que la classe "`METALANISOFOAM`" représente le comportement mécanique des mousses. On affecte à cette classe un comportement non linéaire et les termes situés après le sigle "`@Coefs`" précisent les entrées matériaux nécessaires pour faire fonctionner le programme.

Les valeurs des constantes participant au changement d'échelle sont déterminées par une méthode d'optimisation. Les constantes $C$, $B$, $C_\rho$ et $B^p$ sont optimisées à partir de la courbe de traction expérimentale de la mousse MN 110-050-16 pour la direction RD.

Les valeurs des constantes optimisées sont :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} C & = & 0,92 \\ B & = & 4,55 \\ C_\rho & = & 1,68 \\ B^p & = & 1,18 \end{array}} \tag{IV.117}$$

*Remarque : pour l'implémentation du modèle de poutres dans ZeBuLoN, une limite d'élasticité plus réaliste que celle à 0,2 %, trouvée à la section III.4, est utilisée pour le comportement du nickel*

$$\sigma_0 = 70 \ MPa \tag{IV.118}$$

Les coefficients de l'équation (IV.117) sont utilisées pour simuler le comportement dans la direction de défilement et transverse des trois grammages. Les résultats du modèle sont présentés sur la figure IV.8. On constate que le modèle rend bien compte de la forte anisotropie des mousses. En optimisant les paramètres sur la seule courbe de la direction RD de la mousse MN 110-050-16, le modèle est capable de décrire la courbe de traction suivant la direction transverse TD de la figure IV.8a (même si le seuil de la limite d'élasticité de la mousse est un petit peu trop élevé). Toutefois, la non-linéarité du modèle est trop abrupte. Le domaine de la non-linéarité plastique du modèle n'est pas assez étendue. La non-linéarité, introduite dans le modèle, est uniquement liée au mouvement des fronts élastique/plastique des surfaces libres vers le cœur de la mousse. Cette non-linéarité apparaît insuffisante comparée à l'expérience.

*Remarque : l'étude du seul mécanisme de flexion des brins semble suffisante, en première approximation, à la description du comportement de la mousse en traction.*

On peut remarquer que les résultats de la modélisation sont moins bons pour les mousses MN 110-042-16 et MN 110-035-16 (voir figures IV.8b et IV.8c). Pour améliorer les résultats, il faudrait identifier à nouveau les valeurs des rapports d'anisotropie $R$ et $Q$. En effet, la valeur des rapports d'anisotropie n'a été identifiée que pour la mousse MN 110-050-16 par tomographie aux rayons X.

De plus, comme on l'a vu à la section III.1.2, la mousse de polyuréthanne mise en jeu dans la fabrication des mousses semble différente pour la mousse MN 110-035-16. Le tableau III.1 donne les résultats de pesées réalisées sur les différentes mousses en sortie d'électrolyse et après le traitement de recuit.

Les pesées sont effectuées sur de grandes plaques afin de minimiser les erreurs de mesure. La différence de masse donne la masse du polyuréthanne pyrolisé. Il apparaît une différence notable entre la mousse polymère utilisée pour la réalisation de la mousse de nickel MN 110-035-16 et celle des autres grammages. Ceci peut expliquer les résultats moins bons observés pour la modélisation de la mousse MN 110-035-16.

Sur la figure IV.7, l'évolution des paramètres $\alpha_a^*$ et $\alpha_c^*$ dans les poutres de longueur $a$ et $c$ est représentée en fonction de la déformation, pour une sollicitation suivant la direction RD de la mousse. Pour mémoire, le paramètre $\alpha_a^*$ est défini comme le rapport entre la profondeur plastique $\alpha_a$ et la demi-épaisseur des brins $t/2$. Lorsque le comportement de la poutre est élastique, $\alpha_a$ est égal à $t/2$. $\alpha_a^*$ est donc égal à 1. Au fur et à mesure que la plasticité envahit la poutre, la valeur de $\alpha_a^*$ diminue jusqu'à s'annuler lorsque toute la poutre est totalement plastifiée.

Il est aussi visible sur le graphique de la figure IV.7 que $\alpha_a^*$ décroît plus vite que $\alpha_c^*$. Cela signifie que la plasticité arrive et se développe plus rapidement dans la poutre de longueur $a$ que dans celle de longueur $c$ ; ce qui est en accord avec l'hypothèse de Voigt faite sur l'égalité des flèches et $c > a$. Comme la poutre de longueur $a$ est plus courte et que sa flèche est identique à la poutre de longueur $c$, les contraintes y sont plus importantes. La plasticité débute alors plus tôt dans la poutre de longueur $a$ et s'y propage plus rapidement.

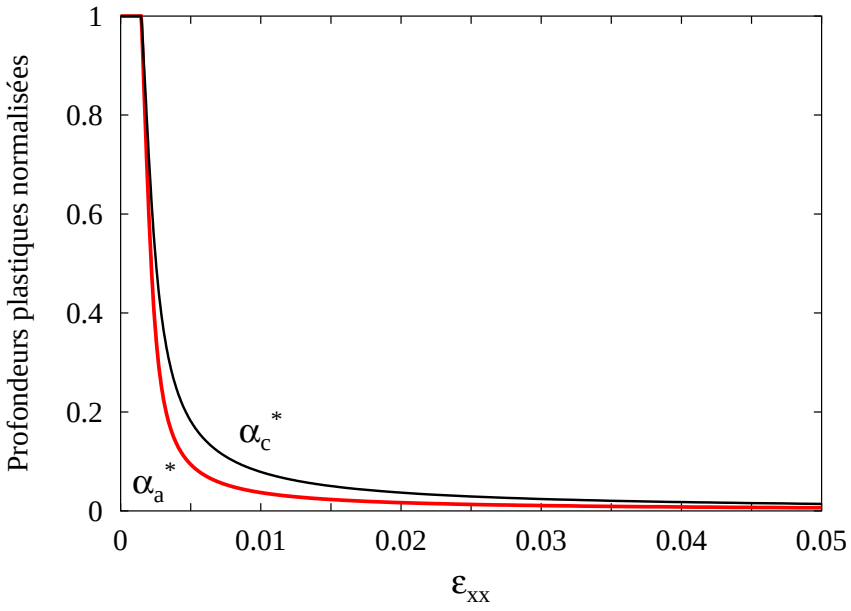



**Figure IV.7** : Profondeurs plastiques normalisées dans les poutres de longueur $a$ et $c$ – sollicitation suivant la direction RD de la mousse.

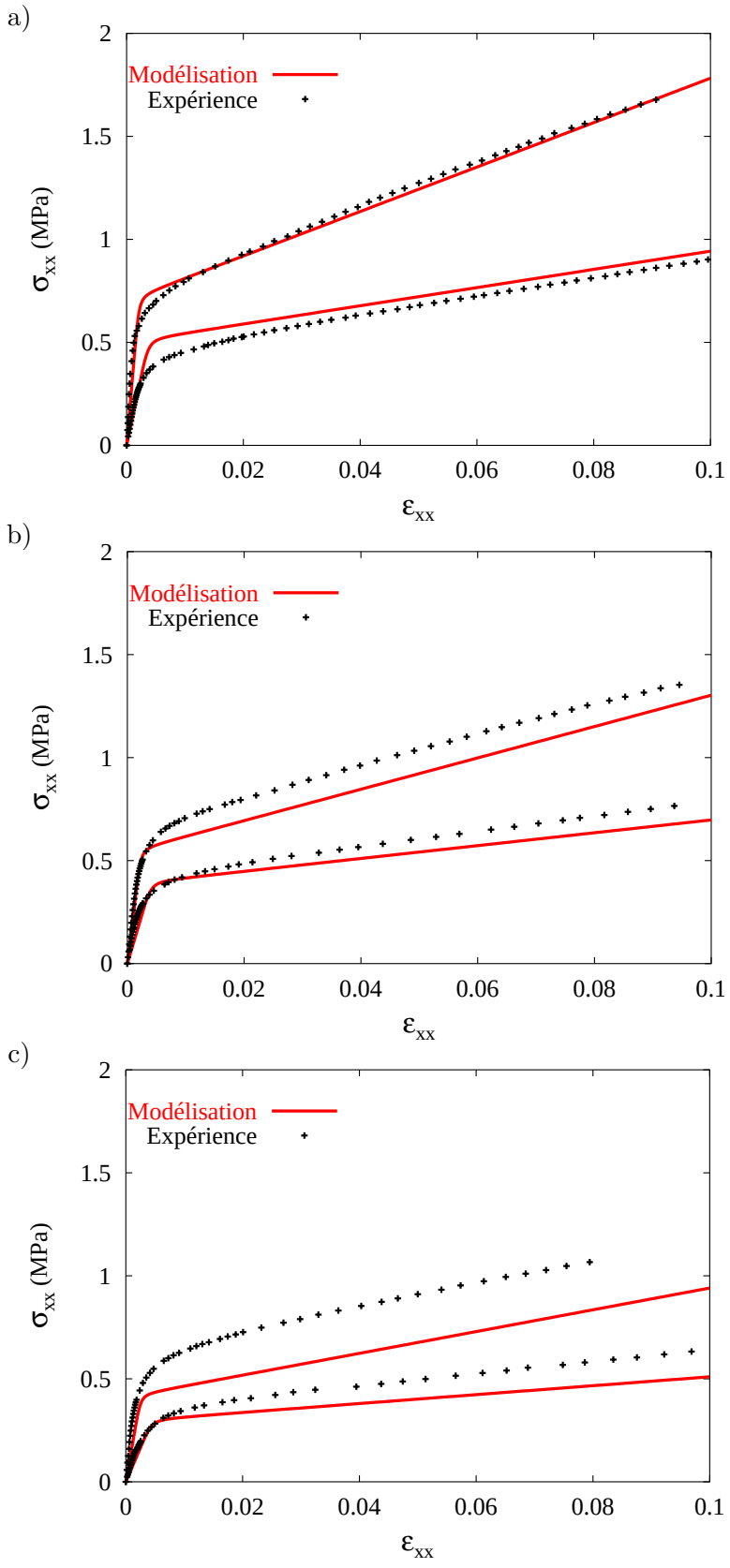



**Figure IV.8** : Modèle anisotrope élastoplastique à brins pleins : a) mousse MN 110-050-16, b) mousse MN 110-042-16, c) mousse MN 110-035-16.

## IV.4 Cas des mousses à deux phases

Dans cette partie, la poutre est considérée comme un matériau composite. Les brins de la mousse sont constitués par deux phases. La même convention est utilisée tout au long de ce chapitre pour les mousses à deux phases. Le premier nom représente la phase située à cœur, le deuxième celle située en surface. Par exemple, "élastique/élastoplastique" signifie que la phase 1, située au cœur des brins de la mousse, a un comportement élastique alors que la phase 2, située sur la face externe des brins de la mousse, a un comportement élastoplastique.

Les brins sont supposés être à section carrée $t \times t$ et l'épaisseur de la phase externe vaut $2e$ (voir figure IV.9).

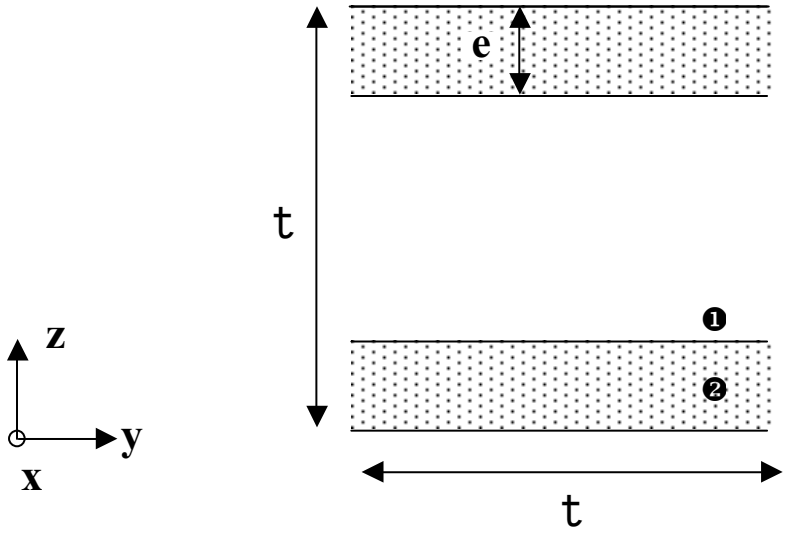



**Figure IV.9** : Section d'une poutre composite.

Avant de s'intéresser au comportement de la mousse, l'expression de la flèche, dans le cas du brin à deux phases, est établie. Pour cela, la même procédure qu'au paragraphe IV.2.1 est utilisée.

### IV.4.1 Détermination de la flèche d'un brin composite "élastique/élastique" de la mousse

Soit $l$, la longueur d'une poutre élémentaire, et $t \times t$, sa section carrée. Pour des raisons de symétrie, seule la moitié de la poutre $l/2$ est considérée. Soit $M$ le moment de flexion appliqué à la poutre et $(Ox, Oy, Oz)$, le repère orthonormé où $O$ est situé au centre du brin. Soit $E_1$ (resp. $E_2$) et $\nu_1$ (resp. $\nu_2$), le module de Young et le coefficient de Poisson de la phase 1 (resp. 2).

D'après l'hypothèse de Navier–Bernoulli, $\varepsilon_{xx}$ est proportionnel à $z$.
$\varepsilon_{xx}$ est de la forme $\varepsilon_{xx} = kz$, où k est une constante.

On a donc pour $\sigma_{xx}$ :

$$\begin{aligned} &\text{Pour} z \in \left[-\frac{t}{2}+e; \frac{t}{2}-e\right], && \sigma_{xx} = E_1 kz \\ &\text{Pour} |z| \geq \left(\frac{t}{2}-e\right), && \sigma_{xx} = E_2 kz \end{aligned} \tag{IV.119}$$

Le moment $M$ s'écrit alors :

$$M = \int_{-t/2}^{t/2}\int_{-t/2}^{t/2} \sigma z \, dy \, dz = 2t \int_0^{t/2} \sigma z \, dz$$

$$= 2t \left[ \int_0^{t/2-e} E_1 k z^2 \, dz + \int_{t/2-e}^{t/2} E_2 k z^2 \, dz \right]$$

$$= \frac{2tkE_1}{3}\left(\frac{t}{2}-e\right)^3 + \frac{2tkE_2}{3}\left(\left(\frac{t}{2}\right)^3 - \left(\frac{t}{2}-e\right)^3\right) \tag{IV.120}$$

On peut alors en déduire l'expression de $k$ en fonction de $M$.

$$\boxed{k = \frac{12M}{E_2 t^4 \left[1 + \left(\frac{E_1}{E_2} - 1\right)(1-e^*)^3\right]}} \tag{IV.121}$$

avec $\boxed{e^* = \dfrac{e}{t/2}}$

A partir des déformations et des conditions aux limites $u_x(\forall x; z=0) = 0$ et $u_z(x = l/2; z = 0) = 0$,

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} = kz, & \forall z \in \left[-\dfrac{t}{2}+e; \dfrac{t}{2}-e\right] \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = -\nu_1 kz, & \forall z \in \left[-\dfrac{t}{2}+e; \dfrac{t}{2}-e\right] \\ \qquad\quad = -\nu_2 kz, & \forall |z| \geq \left(\dfrac{t}{2}-e\right) \end{cases} \tag{IV.122}$$

on peut en déduire le champ des déplacements $u_x$ et $u_z$ en chaque point de la poutre.

On trouve alors :

$$\forall z \in \left[-\frac{t}{2}+e; \frac{t}{2}-e\right], \begin{cases} u_x = kxz \\ u_z = -\dfrac{\nu_1 k}{2} z^2 + \dfrac{k}{2}\left(\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 - x^2\right) \end{cases} \tag{IV.123}$$

et

$$\forall |z| \geq \left(\frac{t}{2}-e\right), \begin{cases} u_x = kxz \\ u_z = -\dfrac{\nu_2 k}{2} z^2 + \dfrac{k}{2}\left(\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 - x^2\right) + \dfrac{k}{2}(\nu_2 - \nu_1)\left(\dfrac{t}{2}-e\right)^2 \end{cases} \tag{IV.124}$$

La flèche de la poutre est définie comme le déplacement vertical du point $0\,(x = 0; z = 0)$.
Il résulte que :

$$\boxed{\delta = u_z(x=0; z=0) = \frac{k}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{12M}{2t^4 E_2 \left[1 + \left(\frac{E_1}{E_2} - 1\right)(1-e^*)^3\right]}\left(\frac{l}{2}\right)^2} \tag{IV.125}$$

*Remarque : on retrouve bien l'expression de la flèche élastique (équation (IV.11)) établie au paragraphe IV.2.1 pour ($E_1 = E_2$) ou ($e = t/2$).*

### IV.4.2 Comportement de la mousse à deux phases : élastique/élastique

La même démarche que celle employée dans le cas élastique (voir section IV.2.3) est appliquée ici. Trois familles de poutres de longueurs différentes ($a$, $b$ et $c$) à section carrée $t \times t$ sont considérées. Les poutres de longueur $a$, $b$ et $c$ sont supposées être orientées respectivement suivant la direction transverse TD, la direction de défilement RD, et la direction normale ND de la mousse.

Soit $F_a$, $F_b$ et $F_c$ les forces qui s'appliquent respectivement au milieu de chaque poutre de longueur $a$, $b$ et $c$ ; et $M_a$, $M_b$ et $M_c$, les moments de flexion associés.

Dans un premier temps, on s'intéresse à un essai de traction suivant la direction RD de la mousse. Seules les forces $F_a$ et $F_c$ sont donc prise en compte lors de la sollicitation suivant la direction RD.

En utilisant les mêmes règles de changement d'échelle qu'au paragraphe IV.2.2, on a les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sigma^* & = & \dfrac{2C}{ac}\left(\dfrac{M_a}{a}+\dfrac{M_c}{c}\right) \\ \varepsilon^* & = & B\,\dfrac{\delta}{b} \end{array} \right. \tag{IV.126}$$

De plus, à partir de l'équation (IV.125), on est capable d'exprimer le moment de flexion élastique/élastique en fonction de la flèche.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} M_a & = & \dfrac{8t^4E_2\left[1+\left(\dfrac{E_1}{E_2}-1\right)(1-e^*)^3\right]}{12a^2}\,\delta_a \\ M_c & = & \dfrac{8t^4E_2\left[1+\left(\dfrac{E_1}{E_2}-1\right)(1-e^*)^3\right]}{12c^2}\,\delta_c \end{array} \right. \tag{IV.127}$$

En ajoutant l'hypothèse de Voigt ($\delta = \delta_a = \delta_c$), on obtient l'expression de la contrainte macroscopique de la mousse $\sigma^*$ en fonction de la déformation $\varepsilon^*$. On peut alors en déduire l'expression du module de Young de la mousse composite $E^{*ee}_{RD}$.

$$\boxed{\frac{E^{*ee}_{RD}}{E_2} = \frac{16C}{12B}\left(\frac{t}{c}\right)^4\left(\frac{b}{a}\right)\left[1+\left(\frac{c}{a}\right)^3\right]\left[1+\left(\frac{E_1}{E_2}-1\right)(1-e^*)^3\right]} \tag{IV.128}$$

*Remarque : on retrouve bien la formule du module de Young à un seul constituant avec l'expression* $\left[1+\left(\dfrac{E_1}{E_2}-1\right)(1-e^*)^3\right]$ *en plus.*

Pour une sollicitation dans la direction transverse TD, on obtient le rapport des modules de Young suivant :

$$\boxed{\frac{E^{*ee}_{TD}}{E_2} = \frac{16C}{12B}\left(\frac{t}{c}\right)^4\left(\frac{a}{b}\right)\left[1+\left(\frac{c}{b}\right)^3\right]\left[1+\left(\frac{E_1}{E_2}-1\right)(1-e^*)^3\right]} \tag{IV.129}$$

*Remarque : le rapport des modules suivant les deux directions de chargement sont identiques que la mousse soit constituée d'une ou de deux phases. Il ne fait intervenir que des facteurs géométriques (voir Gibson et Ashby (Gibson et Ashby, 1997), $Q = 1$).*

$$\frac{E^{*ee}_{RD}}{E^{*ee}_{TD}} = R^2 \left( \frac{1 + \frac{1}{Q^3}}{\frac{1}{R^3} + \frac{1}{Q^3}} \right) \tag{IV.130}$$

### IV.4.3 Détermination de la flèche d'un brin composite "élastoplastique/élastoplastique" de la mousse

Le calcul de la flèche d'un brin de la mousse est repris dans ce paragraphe, en considérant que chaque phase possède un comportement élastoplastique. On étudie le cas où la plasticité a débuté dans chacune des phases (voir figure IV.10). Les expressions de la flèche plastique dans les différentes configurations possibles (comme dans le cas où un seul matériau a commencé à plastifier) se déduisent directement de l'expression de la flèche plastique trouvée dans le cas étudié.

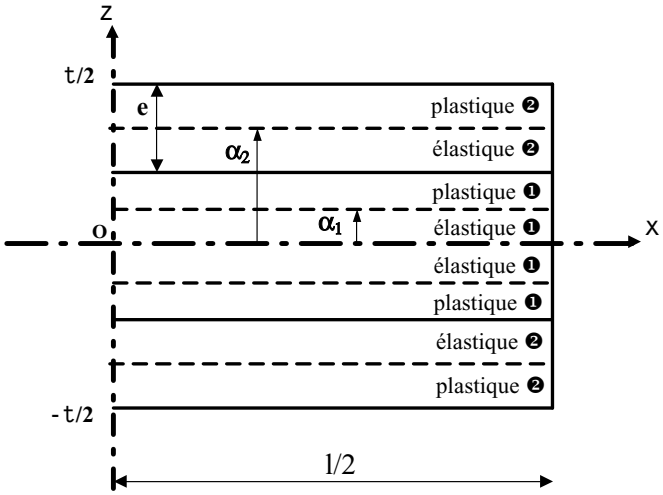



**Figure IV.10** : Cas d'un brin à deux phases : chaque phase a un comportement élastoplastique.

Soit $l$, la longueur d'une poutre élémentaire, et $t \times t$, sa section carrée. Comme précédemment, seule la moitié de la poutre $l/2$ est considérée.
Soit $M$, le moment de flexion appliqué à la poutre et $(Ox, Oy, Oz)$, le repère orthonormé où $O$ est situé au centre du brin.
Soit $E_1$ (resp. $E_2$) et $\nu_1$ (resp. $\nu_2$), le module de Young et le coefficient de Poisson de la phase interne 1 (resp. de la phase externe 2).

Comme il est indiqué sur la figure IV.10, $\alpha_1$ (resp. $\alpha_2$) représente la profondeur plastique dans la phase 1 (resp. 2). Le comportement de la poutre est donc divisé en quatre régimes. Entre $[0; \alpha_1]$, la phase 1 a un comportement élastique puis plastique entre $[\alpha_1; t/2 - e]$. Et, entre $[t/2 - e; \alpha_2]$, c'est la phase 2 qui possède un comportement élastique tandis qu'il est plastique entre $[\alpha_2; t/2]$.

En faisant l'hypothèse de Navier–Bernoulli où une section droite reste droite, $\varepsilon_{xx}$ est de la forme $\varepsilon_{xx} = kz$ où k est une constante.

On a donc pour $\sigma_{xx}$ :

$$\begin{cases} \forall z \in [0;\alpha_1], & \sigma_{xx} = E_1 kz \\ \forall z \in \left[\alpha_1; \dfrac{t}{2}-e\right], & \sigma_{xx} = \sigma_{01} + H_1\left(kz - \dfrac{\sigma_{xx}}{E_1}\right) \\ \forall z \in \left[\dfrac{t}{2}-e; \alpha_2\right], & \sigma_{xx} = E_2 kz \\ \forall z \in \left[\alpha_2; \dfrac{t}{2}\right], & \sigma_{xx} = \sigma_{02} + H_2\left(kz - \dfrac{\sigma_{xx}}{E_2}\right) \end{cases} \tag{IV.131}$$

A l'aide de la continuité de $\sigma_{xx}$ en $\alpha_1$ et $\alpha_2$, on trouve que les profondeurs plastiques sont liées par la formule suivante :

$$k = \frac{\sigma_{01}}{E_1\alpha_1} = \frac{\sigma_{02}}{E_2\alpha_2} \tag{IV.132}$$

On en déduit alors l'expression du moment $M$ de flexion.

$$\begin{aligned} M &= 2t\int_0^{t/2} \sigma z\, dz \\ &= 2t\int_0^{\alpha_1} \frac{\sigma_{01}}{\alpha_1} z^2\, dz + 2t\int_{\alpha_1}^{t/2-e} \frac{\sigma_{01}E_1}{E_1+H_1}\left(z + \frac{H_1}{E_1\alpha_1}z^2\right) dz \\ &+ 2t\int_{t/2-e}^{\alpha_2} \frac{\sigma_{02}}{\alpha_2} z^2\, dz + 2t\int_{\alpha_2}^{t/2} \frac{\sigma_{02}E_2}{E_2+H_2}\left(z + \frac{H_2}{E_2\alpha_2}z^2\right) dz \end{aligned} \tag{IV.133}$$

En posant $\alpha_1^* = \dfrac{\alpha_1}{t/2}$, $\alpha_2^* = \dfrac{\alpha_2}{t/2}$ et $e^* = \dfrac{e}{t/2}$, il vient que :

$$\begin{aligned} M = &\frac{t^3\sigma_{01}E_1}{12\,(E_1+H_1)}\left[-\alpha_1^{*2} + 3\,(1-e^*)^2 + \frac{2H_1}{E_1\alpha_1^*}\,(1-e^*)^3\right] \\ &+ \frac{t^3\sigma_{02}E_2}{12\,(E_2+H_2)}\left[-\alpha_2^{*2} + 3 + \frac{1}{\alpha_2^*}\left(\frac{2H_2}{E_2} - 2\left(1+\frac{H_2}{E_2}\right)(1-e^*)^3\right)\right] \end{aligned} \tag{IV.134}$$

A partir des déformations et des conditions aux limites $u_x(\forall x; z=0) = 0$ et $u_z(x = l/2; z = 0) = 0$,

$$\forall z \in [0;\alpha_1], \begin{cases} u_x = \dfrac{\sigma_{01}}{E_1\alpha_1} xz \\ u_z = \dfrac{-\nu_1\sigma_{01}}{2E_1\alpha_1} z^2 + \dfrac{\sigma_{01}}{2E_1\alpha_1}\left(\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 - x^2\right) \end{cases} \tag{IV.135}$$

La flèche résiduelle $\delta^p$ est définie lorsque la charge $M$ est relâchée, *i*.e. après le retour élastique de la poutre. On écrit alors que :

$$\delta^p = u_z^{final}(x = 0, z = 0) \tag{IV.136}$$

avec

$$u_z^{final}(x,z) = u_z^{charge}(x,z) + u_z^{décharge}(x,z) \tag{IV.137}$$

$u_z^{charge}$ correspond au déplacement obtenu en charge maximale $M$ et $u_z^{décharge}$ correspond au déplacement dû à la réponse élastique de la poutre à l'application du moment $(-M)$.
$u_z^{décharge}$ utilise donc le moment $(-M)$ déterminée par la formule (IV.125) et l'équation (IV.134).

$$\boxed{\delta^p = \frac{\sigma_{01}}{E_1 \alpha_1^* t}\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{12M}{2t^4 E_2\left[1+\left(\frac{E_1}{E_2}-1\right)\left(1-e^*\right)^3\right]}\left(\frac{l}{2}\right)^2} \tag{IV.138}$$

*Remarque : les bornes des profondeurs plastiques normalisées $\alpha_1^*$ et $\alpha_2^*$ sont notées dans le tableau IV.2.*

| Profondeur plastique normalisée | Elastique | Plastique |
|---|---|---|
| $\alpha_1^*$ | $1-e^*$ | 0 |
| $\alpha_2^*$ | 1 | $1-e^*$ |

**Tableau IV.2** : Bornes des profondeurs plastiques normalisées $\alpha_1^*$ et $\alpha_2^*$.

*La valeur* 0 *indiquée dans le tableau IV.2 pour la profondeur plastique normalisée $\alpha_1^*$ est une limite. En effet, comme il a été vu au paragraphe IV.3.1, la profondeur plastique tend vers la valeur zéro sans jamais l'atteindre. La poutre élastoplastique linéaire peut accommoder n'importe quel moment appliqué $M$. La fibre neutre de la poutre élastoplastique ne plastifie jamais. Le cas $\alpha_1^* = 0$ n'arrive donc jamais.*

Il a été dit que l'expression de la flèche plastique (équation (IV.138)) permet de retrouver les autres situations.
Si l'on considère le cas où la phase 1 et 2 sont élastiques. On a alors : $\alpha_1^* = 1-e^*$, $\alpha_2^* = 1$ et $H_1 = H_2 = 0$. L'équation (IV.134) du moment $M$ se transforme en :

$$M = \frac{2t^3\sigma_{01}}{12}\left(1-e^*\right)^2 + \frac{2t^3\sigma_{02}}{12}\left(1-\left(1-e^*\right)^3\right) \tag{IV.139}$$

L'équation (IV.132) devient :

$$\sigma_{02} = \frac{E_2}{E_1\left(1-e^*\right)}\sigma_{01} \tag{IV.140}$$

Le moment $M$ s'écrit :

$$M = \frac{2t^3\sigma_{01}}{12E_1\left(1-e^*\right)}\left[E_2 + \left(E_1-E_2\right)\left(1-e^*\right)^3\right] \tag{IV.141}$$

L'expression de la flèche plastique se simplifie et devient nulle. On retrouve donc bien le cas où les deux matériaux sont élastiques.

### IV.4.4 Comportement de la mousse à deux phases : élastoplastique/élastoplastique

Pour connaître le comportement de la mousse constituée de brins à deux phases, il suffit de suivre la même démarche que celle présentée au paragraphe IV.3.3.

Pour une sollicitation suivant la direction RD, on part de l'équation suivante :

$$\sigma^* = \frac{2C}{ac}\left(\frac{M_a}{a} + \frac{M_c}{c}\right) \tag{IV.142}$$

$M_a$ est exprimé en fonction de $\alpha_{a_1}^*$ et $\alpha_{a_2}^*$ à l'aide de l'équation (IV.134). Il suffit de remplacer $\alpha_1^*$ par $\alpha_{a_1}^*$, $\alpha_2^*$ par $\alpha_{a_2}^*$ et $l$ par $a$.

De même $M_c$ s'exprime en fonction de $\alpha_{c1}^*$ et $\alpha_{c2}^*$. Dans l'équation du moment (équation (IV.134)), $\alpha_1^*$ par $\alpha_{c1}^*$, $\alpha_2^*$ par $\alpha_{c2}^*$ et $l$ par $c$.

Donc $\sigma^*$ dépend des quatre valeurs $\alpha_{a1}^*$, $\alpha_{a2}^*$, $\alpha_{c1}^*$ et $\alpha_{c2}^*$.

Quatre relations sont donc nécessaires. En écrivant la continuité de la contrainte $\sigma_{xx}$ en $\alpha_{a1}$ et $\alpha_{a2}$ pour la poutre de longueur $a$ et en supposant qu'une section droite reste droite, on trouve une relation entre $\alpha_{a1}^*$ et $\alpha_{a2}^*$. De même, les paramètres $\alpha_{c1}^*$ et $\alpha_{c2}^*$ sont liés entre eux par les équations de continuité de la contrainte $\sigma_{xx}$ au niveau de la poutre de longueur $c$.
Les deux autres équations sont données par l'équalité des flèches plastiques ($\delta_a^p = \delta_c^p$) et la décomposition de la déformation totale en déformation élastique et plastique ($\varepsilon^* = \varepsilon^{*e} + \varepsilon^{*p}$).

En résumé, pour une déformation totale $\varepsilon^*$, on est capable de trouver les valeurs $\alpha_{a1}^*$, $\alpha_{a2}^*$, $\alpha_{c1}^*$ et $\alpha_{c2}^*$ associées et ainsi, d'en déduire la valeur de la contrainte $\sigma^*$. La relation entre ($\sigma^*$, $\varepsilon^*$) est donc établie.

## IV.5 Application des modèles à deux phases

### IV.5.1 Mousses à brins creux : phases élastique/élastoplastique

La fabrication des mousses de nickel à partir d'une mousse polymère implique, que les brins de la mousse de nickel après traitement thermique, sont creux. Cette caractéristique des mousses peut être prise en compte dans le modèle en considérant qu'un brin est constitué de deux phases. La phase intérieure a un comportement élastique (elle représente l'air) tandis que la phase extérieure a un comportement élastoplastique (celui du nickel). Les formules sont écrites dans le cas général où la phase intérieure est supposée avoir un "vrai" comportement élastique. Les coefficients de la phase intérieure (l'air) ne sont pris égaux à zéro que dans l'application numérique du modèle.

Dans ce paragraphe, on souhaite faire ressortir l'effet de la prise en compte des brins creux sur la partie non-linéaire de la courbe de traction de la mousse. On étudiera la différence entre brins creux/pleins pour un seul grammage (mousse MN 110-050-16) suivant la direction RD de défilement de la mousse. L'étude de l'anisotropie n'est donc pas l'enjeu de cette partie.

Dans un souci de simplification des équations, on ne s'intéresse qu'à deux populations de poutres : celles de longueur $a$ et $b$. Les poutres de longueur $c$ sont supposées être égales à celles de longueur $a$ ($a = c$).

A partir des équations du paragraphe IV.4.3, on est capable d'exprimer le moment de flexion $M_a$ des poutres de longueurs $a$ ainsi que la flèche plastique $\delta_a$ dans le cas élastique/élastoplastique (*i*.e. pour $H_1 = 0$, $\alpha_1^* = 1 - e^*$, et $\sigma_{01} = \sigma_{02}\dfrac{E_1\,(1-e^*)}{E_2\alpha_2^*}$).

On trouve :

$$\left\{\begin{array}{lcl} M_a &=& \dfrac{\sigma_{02}t^3E_2}{12\,(E_2+H_2)}\left[3-\alpha_2^{*2}+\dfrac{2}{\alpha_2^*}\left(\dfrac{H_2}{E_2}+\left(1+\dfrac{H_2}{E_2}\right)\left(\dfrac{E_1}{E_2}-1\right)(1-e^*)^3\right)\right] \\ \delta_a &=& \dfrac{\sigma_{02}}{2t\,(E_2+H_2)\left(1+\left(\dfrac{E_1}{E_2}-1\right)(1-e^*)^3\right)}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\left[\alpha_2^{*2}-3+\dfrac{2}{\alpha_2^*}\right] \end{array}\right. \tag{IV.143}$$

La densité de la mousse est égale à :

$$\rho^* = \frac{m^*}{V^*} = \frac{m_{Ni}}{V^*} = \frac{\rho_{Ni}V_{Ni}}{V^*} \tag{IV.144}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} V_{Ni} & \propto & 2e\ t\,(2a+b) \\ V^* & \propto & a^2 b \end{array} \right. \tag{IV.145}$$

La densité relative de la mousse est donc proportionnelle à :

$$\left(\frac{\rho^*}{\rho_{Ni}}\right) \propto \left(\frac{t}{a}\right)^2 \left(1+\frac{2}{R}\right) e^* \tag{IV.146}$$

Etant donné que l'on mesure l'influence des brins creux sur un seul grammage, cette valeur est constante. On pose :

$$\left(\frac{t}{a}\right)^2 = C'_\rho \tag{IV.147}$$

Le comportement de la mousse s'écrit alors :

$$\begin{array}{rcl} \sigma^* & = & 4C\dfrac{M_a}{a^3} \\ & = & \dfrac{4CC'^{3/2}_\rho \sigma_{0_2} E_2}{12\,(E_2+H_2)} \left[3-\alpha_2^{*2}+\dfrac{2}{\alpha_2^*}\left(\dfrac{H_2}{E_2}+\left(1+\dfrac{H_2}{E_2}\right)\left(\dfrac{E_1}{E_2}-1\right)(1-e^*)^3\right)\right] \end{array} \tag{IV.148}$$

Le module de Young de la mousse, calculé par l'équation (IV.128) devient :

$$\frac{E^{*ee}_{RD}}{E_2} = \frac{32CC'^2_\rho R}{12B}\left[1+\left(\frac{E_1}{E_2}-1\right)(1-e^*)^3\right] \tag{IV.149}$$

- Pour $\alpha_2^* \geq 1-e^*$, à partir de la décomposition de la déformation totale $\varepsilon^*$ en sa partie élastique et plastique, on obtient l'équation du troisième degré en $\alpha_2^*$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}^{eep}_{RD}\alpha_2^{*2} & + & \left[\dfrac{E_2+H_2}{\sigma_{0_2}}\varepsilon^* - 3\mathcal{A}^{eep}_{RD}\right] \\ & + & \dfrac{1}{\alpha_2^*}\left[-2\mathcal{A}^{eep}_{RD}\left(\dfrac{H_2}{E_2}+\left(1+\dfrac{H_2}{E_2}\right)\left(\dfrac{E_1}{E_2}-1\right)(1-e^*)^3\right) - \dfrac{B^p\,(E_2+H_2)}{4\left(C'_\rho\right)^{1/2} R E_2}\right] = 0 \end{array} \tag{IV.150}$$

avec

$$\mathcal{A}^{eep}_{RD} = \frac{B-B^p}{8\left(C'_\rho\right)^{1/2} R\left(1+\left(\dfrac{E_1}{E_2}-1\right)(1-e^*)^3\right)} \tag{IV.151}$$

- Lorsque $a_2^* = 1-e^*$, la phase 2 est complètement plastifiée. L'expression de la flèche résiduelle est à reconsidérer. En effet, lorsque la phase 2 est complètement plastifiée, on observe une discontinuité de la déformation plastique en $z = 1-e^*$.
On a donc :

$$\begin{array}{lcl} \forall z \in \left[-\dfrac{t}{2}+e; \dfrac{t}{2}-e\right], & \sigma_{xx} & = E_1 k' z \\ \forall |z| \geq \left(\dfrac{t}{2}-e\right), & \sigma_{xx} & = \dfrac{\sigma_{0_2} E_2}{E_2+H_2} + \dfrac{E_2 H_2}{E_2+H_2} k' z \end{array} \tag{IV.152}$$

On peut donc exprimer le moment de flexion $M_a$ de la poutre de longueur $a$ et en déduire la formule de $k'$ en fonction de $M_a$.

$$k' = \frac{12M_a}{t^4\left[E_1\left(1-e^*\right)^3 + \frac{E_2H_2}{E_2+H_2}\left(1-\left(1-e^*\right)^3\right)\right]} - \frac{3\sigma_{0_2}E_2\left(1-\left(1-e^*\right)^2\right)}{t\left(E_2+H_2\right)\left[E_1\left(1-e^*\right)^3 + \frac{E_2H_2}{E_2+H_2}\left(1-\left(1-e^*\right)^3\right)\right]} \tag{IV.153}$$

La flèche résiduelle $\delta^{p\prime}$ s'exprime alors en fonction du moment de flexion $M_a$.

$$\begin{aligned}\delta^{p\prime} = & \left(\frac{12M_a}{2t^4\left[E_1\left(1-e^*\right)^3 + \frac{E_2H_2}{E_2+H_2}\left(1-\left(1-e^*\right)^3\right)\right]}\right. \\ & \left. - \frac{3\sigma_{0_2}E_2\left(1-\left(1-e^*\right)^2\right)}{2t\left(E_2+H_2\right)\left[E_1\left(1-e^*\right)^3 + \frac{E_2H_2}{E_2+H_2}\left(1-\left(1-e^*\right)^3\right)\right]}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ & - \frac{12M_a}{2t^4E_2\left[1+\left(\frac{E_1}{E_2}-1\right)\left(1-e^*\right)^3\right]}\left(\frac{a}{2}\right)^2\end{aligned} \tag{IV.154}$$

Il est alors possible d'exprimer la contrainte $\sigma^*$ de la mousse lorsque la couche externe du brin est complètement plastifiée à partir de la décomposition de la déformation $\varepsilon^*$ en sa partie élastique et plastique.

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma^*}{E^{*ee}_{RD}} + B^p\,\frac{\delta^{p\prime}}{b} \tag{IV.155}$$

Il suffit de remplacer $\delta^{p\prime}$ par l'équation (IV.154) et le moment $M_a$ par $\frac{\sigma^* a^3}{4C}$. On trouve alors l'expression de $\sigma^*$ en fonction de $\varepsilon^*$.

Le modèle, décrivant le comportement des brins creux, a été écrit dans un programme compréhensible par ZebFront (voir Annexe E). Les mêmes valeurs des constantes de changement d'échelle, optimisées pour le comportement élastoplastique des brins pleins (voir section d) page 111), ont été utilisées.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} C & = & 0,92 \\ B & = & 4,55 \\ C'_\rho & = & 0,075 \\ B_p & = & 1,18 \end{array}} \tag{IV.156}$$

Les valeurs des coefficients, symbolisant le comportement de l'air sont prises égales à zéro. Les valeurs de l'épaisseur normalisée du nickel dans les brins $e^*$ et du rapport d'anisotropie $R$ ont été optimisées à partir de la courbe de traction expérimentale de la mousse MN 110-050-16 suivant la direction RD. La même méthode d'optimisation que celle employée au paragraphe d) (page 111) a été utilisée ; sauf qu'ici, les

valeurs des constantes de changement d'échelle (C, B, $C'_\rho$, $B_p$) ont été fixées (voir équation IV.156). On ne recherche donc que les valeurs de l'épaisseur normalisée $e^*$ et du rapport d'anisotropie $R$ qui conviennent le mieux pour décrire le comportement expérimental. Le rapport d'anisotropie $R$ est différent de la valeur 1,24 trouvée dans la section I.5.2 puisque l'on a supposé pour simplifier que les longueurs des poutres $c$ et $a$ sont identiques ($a = c$).
On trouve les valeurs suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} e^* & = & 0,32 \\ R & = & 0,82 \end{array}} \tag{IV.157}$$

*Remarque 1 : en première approximation, la valeur de $e^*$ est du même ordre de grandeur que celle déterminée expérimentalement par microscopie électronique à balayage. En effet, d'après les observations MEB, les brins apparaissent de forme triangulaire, en bordure de Plateau, avec pour longueur des côtés, $t \simeq 70$ $\mu$m (voir section 3.). L'épaisseur des brins, identifiée par analyse d'images (voir section II.2), est de 12 $\mu$m pour les brins aux bords de la mousse et de 8 $\mu$m pour ceux situés à cœur.*
*Si on choisit comme valeur moyenne de l'épaisseur 10 $\mu$m, on obtient :*

$$e^* = \frac{e}{t/2} = 0,28 \tag{IV.158}$$

*On peut remarquer que le modèle n'a pas été établi pour des brins à section triangulaire mais carrée. Pour calculer l'équivalence entre brins à section triangulaire et carrée, on suppose que la section des brins forment un triangle équilatéral de longueur $t$. On cherche donc à déterminer l'épaisseur $e_\square$ des brins à section carrée $t \times t$ (voir figure IV.11).*

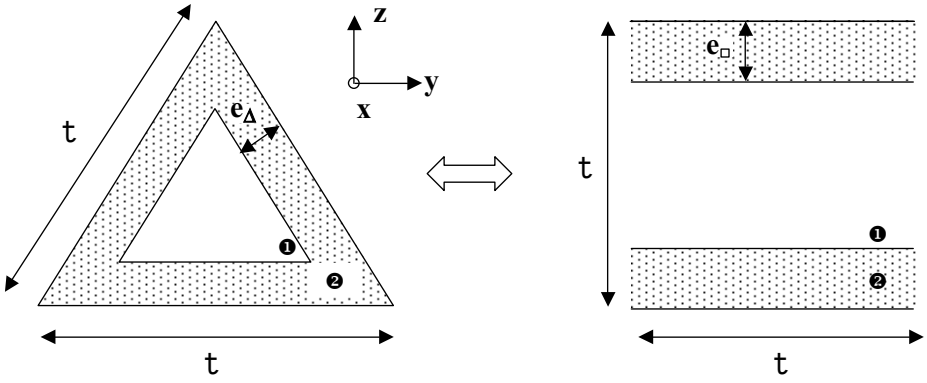



**Figure IV.11** : Equivalence entre section triangulaire et carrée des brins.

*Pour un brin à section triangulaire, la surface occupée par le nickel est :*

$$S_\triangle = \frac{\sqrt{3}t^2}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}t}{2} - 3e_\triangle\right)\left(t - 2\sqrt{3}e_\triangle\right) \tag{IV.159}$$

*Pour la surface carrée, on a :*

$$S_\square = 2\ t\ e_\square \tag{IV.160}$$

*On en déduit donc la valeur de $e_\square$.*

$$S_\triangle = S_\square \iff \boxed{e_\square = \frac{\sqrt{3}t}{8} - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3e_\triangle}{2t}\right)\left(\frac{t}{2} - \sqrt{3}e_\triangle\right)} \tag{IV.161}$$

*A partir des valeurs* $t = 70$ $\mu$m *et* $e_{\triangle} = 10$ $\mu$m, *on trouve que* $e_{\square} = 11,3$ $\mu$m, i.*e.* $e^*_{\square} = 0,32$.

*Remarque 2 : la valeur 0,82 trouvée pour le rapport d'anisotropie R semble faible compte tenu de la forte anisotropie des mousses de nickel. Toutefois, comme l'on ne considère plus que deux familles de poutres, la valeur du rapport* $Q = c/a$ *passe de 1,51 à 1. Pour garder le même rapport entre Q et R, la valeur de R passe de 1,24 à 0,82.*

Le résultat du modèle pour les brins creux est tracé sur la figure IV.12. La prise en compte des brins évidés n'améliore pas la partie non-linéaire de la courbe. Au contraire, la partie non-linéaire est plus étendue pour le modèle à brins pleins que pour celui à brins creux. La non-linéarité introduite par le modèle provient de l'arrivée et de la propagation du front élastique/plastique dans le nickel. Si la poutre est creuse, l'épaisseur de nickel est diminuée. La propagation du front élastique/plastique se termine donc plus rapidement. La partie non-linéaire sur la courbe simulée est alors plus petite. Pour avoir une non-linéarité plus étendue pour mieux décrire le comportement des mousses de nickel, il faut simuler des brins d'épaisseur plus grande. En augmentant l'épaisseur de nickel des brins dans la simulation, on augmente la longueur du domaine plastique non-linéaire.

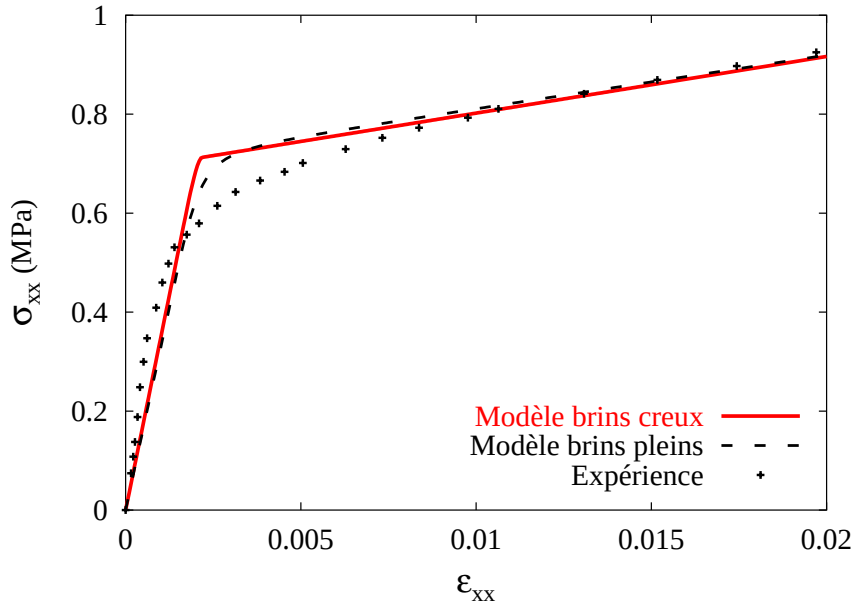



**Figure IV.12** : Modèle élastoplastique à brins creux – mousse MN 110-050-16 – sollicitation suivant la direction RD.

La figure IV.13 représente la profondeur plastique normalisée $\alpha_2^*$ dans la poutre en fonction de la déformation. Dans le régime élastique, la profondeur plastique normalisée vaut 1. A partir de 0,17 %, la plasticité débute dans la poutre et $\alpha_2^*$ diminue. Arrivé à la valeur de $\alpha_2^* = 1 - e^* = 0,68$, le brin de nickel est totalement plastifié.

### IV.5.2 Mousses à différents degrés d'oxydation

L'oxydation de la mousse de nickel peut se rencontrer dans des applications comme les filtres de gaz chauds ou dans les piles à combustible. Comme pour le cas des brins creux, on souhaite mettre en avant dans cette section le comportement des brins à deux phases et non l'anisotropie de la mousse. Un seul grammage (mousse MN 110-042-16) et une seule direction de sollicitation (RD) sont donc considérés.

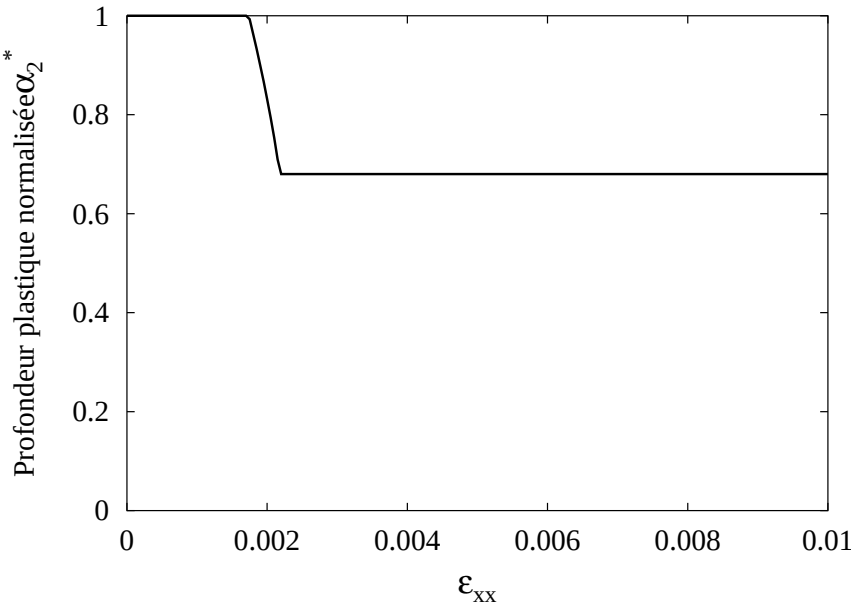



**Figure IV.13** : Profondeur plastique normalisée dans la poutre creuse de longueur $a$ – sollicitation suivant la direction RD de la mousse.

Deux populations de poutres sont prises en compte (celles de longueur $a$ et $b$). Les poutres de longueur $c$ sont supposées égales à celles de longueur $a$ ($a = c$).

On a vu à la section précédente que la prise en compte de l'évidement des brins n'améliore pas le modèle. L'effet des brins creux est donc négligé dans la modélisation des mousses oxydées. Les mousses oxydées sont modélisées par une poutre pleine de nickel entourée d'une couche externe d'oxyde de nickel.

### a) Présentation des mousses oxydées

Des mousses de nickel MN 110-042-16 ont été oxydées à différentes températures et avec différents temps de maintien (voir tableau IV.3). Ces échantillons oxydés ont ensuite été testés mécaniquement en traction. Tous les échantillons ont été prélevés suivant la direction RD de la mousse. Les courbes expérimentales relatives à ces essais sont représentées sur la figure IV.14. On peut remarquer que la couche d'oxyde durcit considérablement la mousse. La mousse passe du comportement élastoplastique ductile du nickel au comportement élastique fragile de l'oxyde de nickel.
Pour une mousse faiblement oxydée (0,25 % de gain en masse), la contrainte à 3 % de déformation s'élève à 1,22 MPa, soit un gain de 0,34 MPa par rapport à la mousse de nickel initiale.

Dans le cas de la mousse MN 110-042-16 oxydée, le module de Young de la mousse s'écrit à partir de l'équation (IV.128) :

$$E^{*ee}_{RD} = \mathcal{K}\ t^4 \left[E_2 + (E_1 - E_2)\,(1 - e^*)^3\right] \tag{IV.162}$$

où $\mathcal{K}$ est une constante.

En choisissant $E_{Ni} = 204\ GPa$ et $E_{NiO} = 220\ GPa$ (Liu et al., 1993), le module de Young du matériau constitutif de la mousse s'accroît de 7,8 % au cours de l'oxydation (passage de la mousse de nickel pur à la mousse d'oxyde de nickel).
Pour une épaisseur de brin $t = 70\ \mu$m, la mousse oxydée à 0,79 % en masse (voir tableau IV.4) a une épaisseur d'oxyde de :

$$e = e^*\ \frac{t}{2} = 1,5\ \mu\text{m} \tag{IV.163}$$

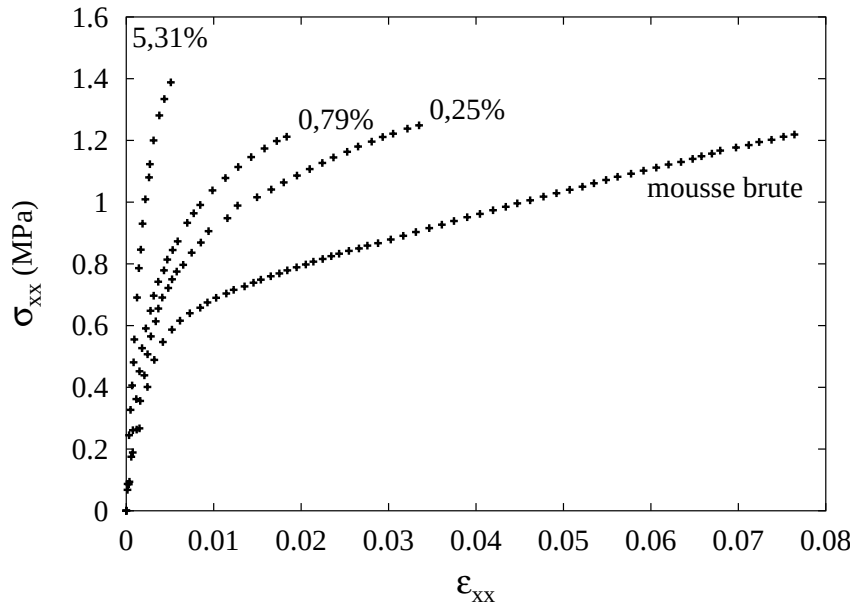



**Figure IV.14** : Courbes de traction de la mousse oxydée MN 110-042-16 en fonction du degré d'oxydation – sollicitation suivant la direction RD de la mousse.

Pour la mousse brute de nickel, on a :

$$E^{*ee}_{RD} = \mathcal{K}\ 4,9\ 10^{-12} \tag{IV.164}$$

Pour la mousse oxydée à 0,79 %, on a :

$$E^{*ee}_{RD} = \mathcal{K}\ 5,85\ 10^{-12} \tag{IV.165}$$

soit un accroissement de module de presque 20 %.

| Type de mousse | Gain en masse (%) | Temps de traitement (h) | Température de maintien (°C ) |
|---|---|---|---|
| MN 110-042-16 | 0,25 | 4 | 420 |
| | 0,79 | 24 | 420 |
| | 5,31 | 4 | 620 |

**Tableau IV.3** : Traitement thermique d'oxydation des mousses de nickel à cellules ouvertes.

*Remarque : le gain en masse maximal (lorsque tout le nickel est transformé en oxyde) est de 27,26 %. Or, les courbes expérimentales montrent que la mousse tend rapidement vers le comportement élastique fragile de l'oxyde de nickel. Au-delà de 6 % de gain en masse, la mousse de nickel oxydée devient beaucoup trop fragile pour que l'on puisse réaliser un essai mécanique satisfaisant.*

Le modèle décrivant le comportement de la mousse oxydée nécessite la connaissance de la densité des mousses ainsi que de l'épaisseur normalisée $e^*$ de la couche d'oxyde.
La densité des mousses en fonction du gain en masse $\eth$ suit la loi :

$$\rho^* = \frac{grammage}{épaisseur\ mousse} = \frac{420\,(1+\eth)}{1,68} \tag{IV.166}$$

| Gain en masse ↄ | Densité $\rho^*$ | Epaisseur normalisée $e^*$ |
|---|---|---|
| 0,25 | 250 | 0,014 |
| 0,79 | 252 | 0,043 |
| 5,31 | 263 | 0,27 |
| 27,26 | 318 | 1 |

**Tableau IV.4** : Densité et épaisseur normalisée des mousses de nickel MN 110-042-16 oxydées.

Les valeurs des densités des mousses en fonction du degré d'oxydation sont données dans le tableau IV.4.

La stœchiométrie de la réaction chimique d'oxydation du nickel permet de donner l'épaisseur normalisée $e^*$ en fonction du degré d'oxydation. Pour la création de $X$ moles d'oxyde de nickel NiO à partir d'une mole de nickel, il reste $(1-X)$ moles de nickel. Les volumes occupés par le nickel et l'oxyde peuvent donc s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V_{Ni} & = & \dfrac{(1-X)\mathcal{N} m_{Ni}}{\rho_{Ni}} \\ V_{NiO} & = & \dfrac{X\mathcal{N} m_{NiO}}{\rho_{NiO}} \end{array} \right. \tag{IV.167}$$

où $\mathcal{N}$ représente le nombre d'Avogadro.

$$\boxed{\frac{V_{Ni}}{V_{NiO}} = \left(\frac{1-X}{X}\right)\left(\frac{\rho_{NiO}}{\rho_{Ni}}\right)\left(\frac{m_{Ni}}{m_{NiO}}\right)} \tag{IV.168}$$

Or, $X$ s'exprime en fonction du gain en masse ↄ.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m_{finale} & = & X\mathcal{N} m_{NiO} + (1-X)\mathcal{N} m_{Ni} \\ m_{initiale} & = & \mathcal{N} m_{Ni} \end{array} \right. \tag{IV.169}$$

Donc

$$ↄ = X\left(\frac{m_{NiO} - m_{Ni}}{m_{Ni}}\right) \tag{IV.170}$$

$$\boxed{X = ↄ\frac{m_{Ni}}{m_O}} \tag{IV.171}$$

De plus,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V_{Ni} & = & t\,(t-2e)\,(2a+b) \\ V_{NiO} & = & 2e\;t\,(2a+b) \end{array} \right. \tag{IV.172}$$

On a donc :

$$\frac{V_{Ni}}{V_{NiO}} = \frac{1-e^*}{e^*} \tag{IV.173}$$

On peut donc en déduire la formule donnant $e^*$.

$$e^* = \frac{ↄ\,(m_{Ni} + m_O)\,\rho_{Ni}}{ↄ\,(m_{Ni} + m_O)\,\rho_{Ni} + (m_O - ↄ m_{Ni})\,\rho_{NiO}} \tag{IV.174}$$

A partir des masses molaires de l'oxygène ($m_O = 16$ g) et du nickel ($m_{Ni} = 58,7$ g), on trouve les valeurs de l'épaisseur normalisée $e^*$ en fonction du degré d'oxydation, voir tableau IV.4.

### b) Modélisation des mousses oxydées

Le comportement des mousses oxydées est assimilé à celui d'une mousse à deux phases. Le cœur du brin possède le comportement élastoplastique du nickel tandis que la couche externe a le comportement élastique de l'oxyde de nickel. Dans cette section, l'intérieur des brins est supposé plein. Cela évite de compliquer inutilement les expressions avec la prise en compte d'une troisième phase élastique à cœur.

Le comportement des mousses oxydées se déduit des équations établies au paragraphe IV.4.3.
Le moment de flexion $M_a$ et la flèche plastique $\delta_a^p$ dans le cas élastoplastique/élastique (*i*.e. pour $H_2 = 0$, $\alpha_2^* = 1$, et $\sigma_{02} = \dfrac{E_2}{E_1 \alpha_1^*} \sigma_{01}$), s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} M_a & = & \dfrac{\sigma_{01} t^3 E_1}{12\left(E_1 + H_1\right)} \left[ 3\left(1-e^*\right)^2 - \alpha_1^{*2} + \dfrac{2}{\alpha_1^*} \left( \dfrac{H_1}{E_1} \left(1-e^*\right)^3 + \dfrac{E_2}{E_1} \left( 1 + \dfrac{H_1}{E_1} \right) \left( 1 - \left(1-e^*\right)^3 \right) \right) \right] \\ \delta_a^p & = & \dfrac{\sigma_{01} E_1}{2t\left(E_1 + H_1\right) E_2 \left( 1 + \left( \dfrac{E_1}{E_2} - 1 \right) \left(1-e^*\right)^3 \right)} \left( \dfrac{a}{2} \right)^2 \left[ \alpha_1^{*2} - 3\left(1-e^*\right)^2 + \dfrac{2}{\alpha_1^*} \left(1-e^*\right)^3 \right] \end{array} \right. \tag{IV.175}$$

La densité de la mousse s'exprime à l'aide des densités du nickel et de l'oxyde de nickel par :

$$\rho^* = \frac{m^*}{V^*} = \frac{m_{Ni} + m_{NiO}}{V^*} = \frac{\rho_{Ni} V_{Ni} + \rho_{NiO} V_{NiO}}{V^*} \tag{IV.176}$$

Or, les volumes de la mousse, du nickel et de l'oxyde de nickel sont proportionnel à :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} V^* & \propto & a^2 b \\ V_{Ni} & \propto & t\left(t-2e\right)\left(2a+b\right) \\ V_{NiO} & \propto & 2et\left(2a+b\right) \end{array} \right. \tag{IV.177}$$

Il résulte que :

$$\rho^* \propto \left( \frac{t}{a} \right)^2 \left( 1 + \frac{2}{R} \right) \left[ \left(1-e^*\right) \rho_{Ni} + e^* \rho_{NiO} \right] \tag{IV.178}$$

On pose la constante de proportionnalité $C_\rho''$ telle que :

$$\left( \frac{t}{a} \right)^2 = C_\rho'' \left( \frac{\rho^*}{\left(1-e^*\right) \rho_{Ni} + e^* \rho_{NiO}} \right) \tag{IV.179}$$

L'expression de la contrainte des mousses oxydées s'écrit donc :

$$\begin{array}{rcl} \sigma^* & = & 4C \dfrac{M_a}{a^3} \\ & = & \dfrac{C\left(C_\rho''\right)^{3/2} \sigma_{01} E_1}{3\left(E_1 + H_1\right)} \left( \dfrac{\rho^*}{\left(1-e^*\right) \rho_{Ni} + e^* \rho_{NiO}} \right)^{3/2} \\ & & \left[ 3\left(1-e^*\right)^2 - \alpha_1^{*2} + \dfrac{2}{\alpha_1^*} \left( \dfrac{H_1}{E_1} \left(1-e^*\right)^3 + \dfrac{E_2}{E_1} \left( 1 + \dfrac{H_1}{E_1} \right) \left( 1 - \left(1-e^*\right)^3 \right) \right) \right] \end{array} \tag{IV.180}$$

A partir de l'équation (IV.149) sur le module de Young de la mousse et de la décomposition de la déformation totale de la mousse $\varepsilon^*$ en sa partie élastique et plastique, on trouve l'équation du troisième degré en $\alpha_1^*$ à résoudre.

Pour $\alpha_1^* < 1 - e^*$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{RD}^{epe}\alpha_1^{*2} &+ \left[\frac{E_1 + H_1}{\sigma_{01}}\varepsilon^* - 3\mathcal{A}_{RD}^{epe}\left(1-e^*\right)^2\right] \\ &+ \frac{1}{\alpha_1^*}\left[-2\mathcal{A}_{RD}^{epe}\left(\frac{H_1}{E_1}\left(1-e^*\right)^3 + \frac{E_2}{E_1}\left(1+\frac{H_1}{E_1}\right)\left(1-\left(1-e^*\right)^3\right)\right)\right. \\ &- \left.\frac{B^p\left(E_1+H_1\right)}{4\left(C_\rho''\right)^{1/2}RE_1}\left(\frac{\left(1-e^*\right)\rho_{Ni} + e^*\rho_{NiO}}{\rho^*}\right)^{1/2}\right] = 0 \end{aligned} \tag{IV.181}$$

avec

$$\mathcal{A}_{RD}^{epe} = \frac{\left(B - B^p\right)E_1}{8\left(C_\rho''\right)^{1/2}RE_2\left(1+\left(\frac{E_1}{E_2}-1\right)\left(1-e^*\right)^3\right)}\left(\frac{\left(1-e^*\right)\rho_{Ni} + e^*\rho_{NiO}}{\rho^*}\right)^{1/2} \tag{IV.182}$$

Les équations du modèle sont écrites dans un programme (voir Annexe E). Les mêmes valeurs des constantes de changement d'échelle, optimisées pour le comportement élastoplastique des brins pleins (voir section d), page 111), ont été utilisées. Seules les valeurs de $C_\rho''$ et $R$ ont été réévaluées à l'aide de la courbe de la mousse de nickel MN 110-042-16 non oxydée.
Les valeurs suivantes sont trouvées :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} C & = & 0,92 \\ B & = & 4,55 \\ B_p & = & 1,18 \\ C_\rho'' & = & 1,65 \\ R & = & 1,03 \end{array}} \tag{IV.183}$$

La valeur du rapport d'anisotropie $R$ (lorsque $Q = 1$), identifiée pour la mousse MN 110-042-16, est supérieure à celle de la mousse MN 110-050-16 ($R = 0,82$). Les cellules de la mousse MN 110-042-16, qui est plus facilement déformable, sont plus allongées par le procédé de fabrication.

La prévision du modèle pour les mousses oxydées est tracée sur la figure IV.15. Le domaine de variation du comportement mécanique des mousses en fonction du degré d'oxydation est bien décrit. Toutefois, le comportement modélisé de la mousse oxydée est plus résistant que celui de la mousse expérimentale. Ceci s'explique par la non prise en compte de l'endommagement de la couche d'oxyde. En effet, la couche d'oxyde a un comportement élastique fragile et se rompt avant que le nickel ne casse. La courbe expérimentale a donc tendance à retrouver l'allure de l'écrouissage du nickel pour les valeurs de déformation plus importante. Dans notre modèle, la couche élastique reste active tout au long de la déformation. Le matériau est donc durci par les deux couches élastiques entourant la couche élastoplastique. L'endommagement est pris en compte dans la section suivante.

### IV.5.3 Rupture des mousses oxydées

La rupture des mousses de nickel oxydées a été observée au MEB pour confirmer l'hypothèse de la fragilité de la couche d'oxyde et connaître sa déformation à rupture. Une éprouvette trapézoïdale (voir figure IV.16) est utilisée pour créer un gradient de déformation dans la zone utile de l'échantillon.

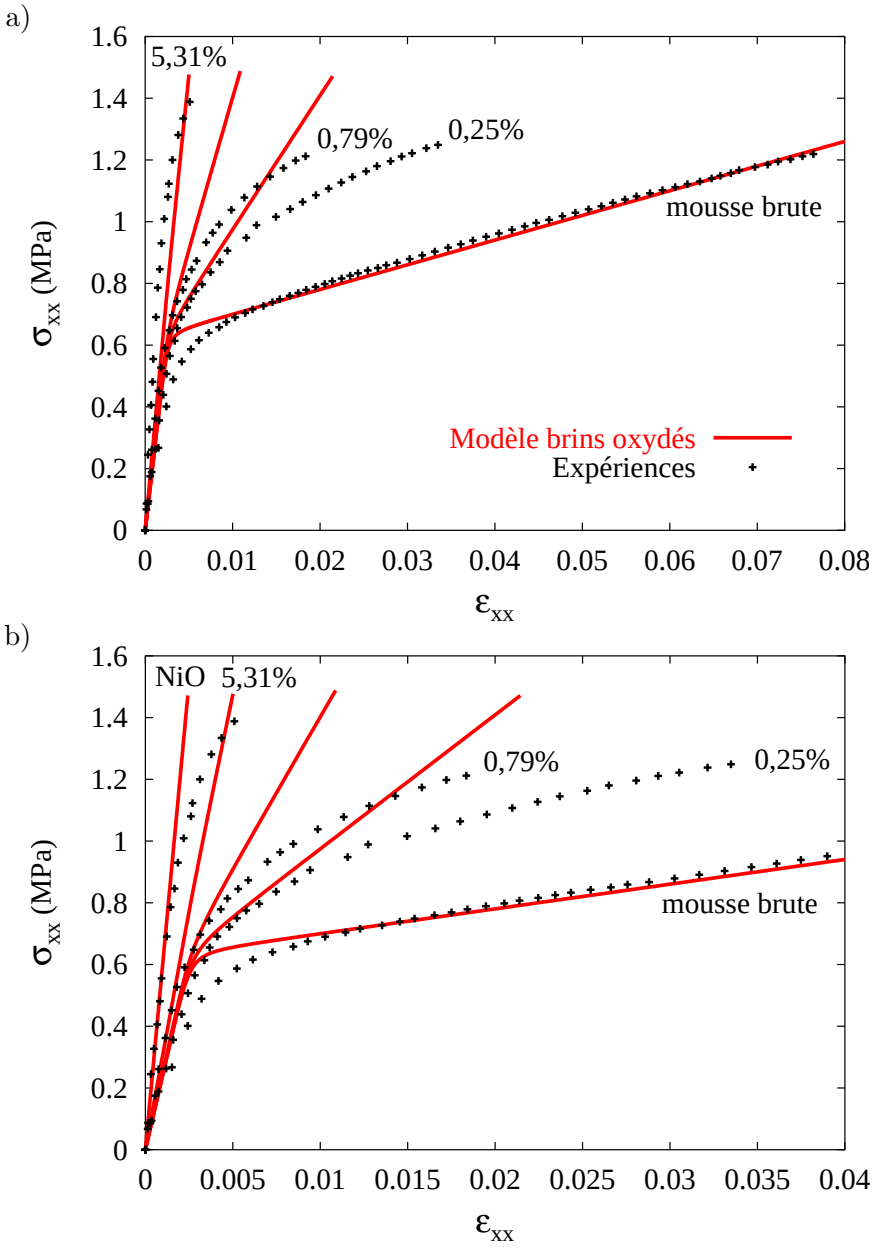



**Figure IV.15** : Modèle élastoplastique pour les mousses oxydées – mousse initiale de nickel MN 110-042-16 – sollicitation suivant la direction RD : a) pour toute la plage des déformations, b) zoom entre 0 et 4 % de déformation (la courbe simulée du comportement de la mousse d'oxyde de nickel est ajoutée).

L'éprouvette trapézoïdale est découpée dans la mousse de nickel MN 110-042-16 puis oxydée sous air jusqu'à un gain en masse $\eth$ de 2,6 %. L'éprouvette est ensuite déformée jusqu'à rupture au cours d'un essai de traction ex-situ et observée sous MEB. Les micrographies de la figure IV.16 montrent les brins de la mousse à différents taux de déformation : au niveau de la zone de rupture, à 3,8 mm, 7 mm et 11,9 mm de la pointe de fissure. L'abattement de contrainte correspondant aux différentes zones est reporté dans le tableau IV.5. A partir de l'abattement de contrainte et de la courbe de traction, les valeurs des déformations, qui correspondent aux micrographies MEB, sont déduites (voir tableau IV.5).

Les observations de la figure IV.16 montrent que la couche d'oxyde se fissure pour un faible taux de déformation macroscopique ($< 0{,}46$ %). Toutefois, la densité de brins fissurés varie en fonction de leur

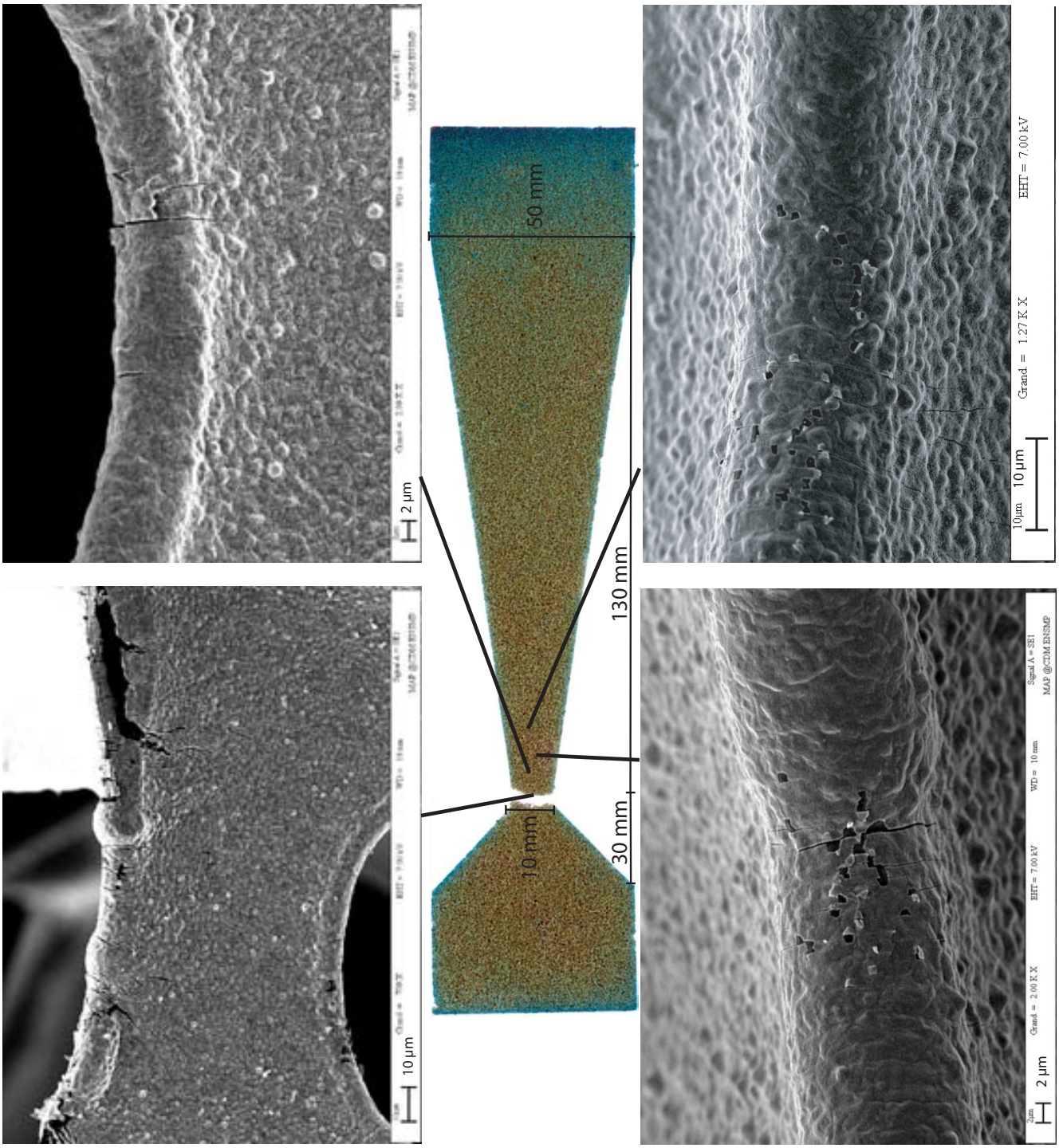



**Figure IV.16** : Eprouvette trapézoïdale – mousse MN 110-042-16 oxydée – sollicitation suivant la direction RD.

distance par rapport à la pointe de fissure. En dessous de 0,46 % de déformation, les brins où la couche d'oxyde est fissurée deviennent de plus en plus rares et les brins fissurés comportent généralement qu'une seule fissure. Cette unique fissure marque le début du phénomène de rupture de la couche d'oxyde (voir figure IV.17). Elle suffit pour que la couche d'oxyde de nickel ne joue plus son rôle. Le brin de nickel n'est plus rigidifié par la couche élastique de l'oxyde.

| Distance de la pointe de fissure (mm) | 3,8 | 7 | 11,9 |
|---|---|---|---|
| Contrainte correspondante (MPa) | 0,89 $\sigma_{rupt}$ 1,37 | 0,82 $\sigma_{rupt}$ 1,26 | 0,73 $\sigma_{rupt}$ 1,12 |
| Déformation correspondante (%) | 0,61 | 0,53 | 0,46 |

**Tableau IV.5** : Etat contrainte/déformation en fonction de la distance par rapport à la pointe de fissure – Eprouvette trapézoïdale.

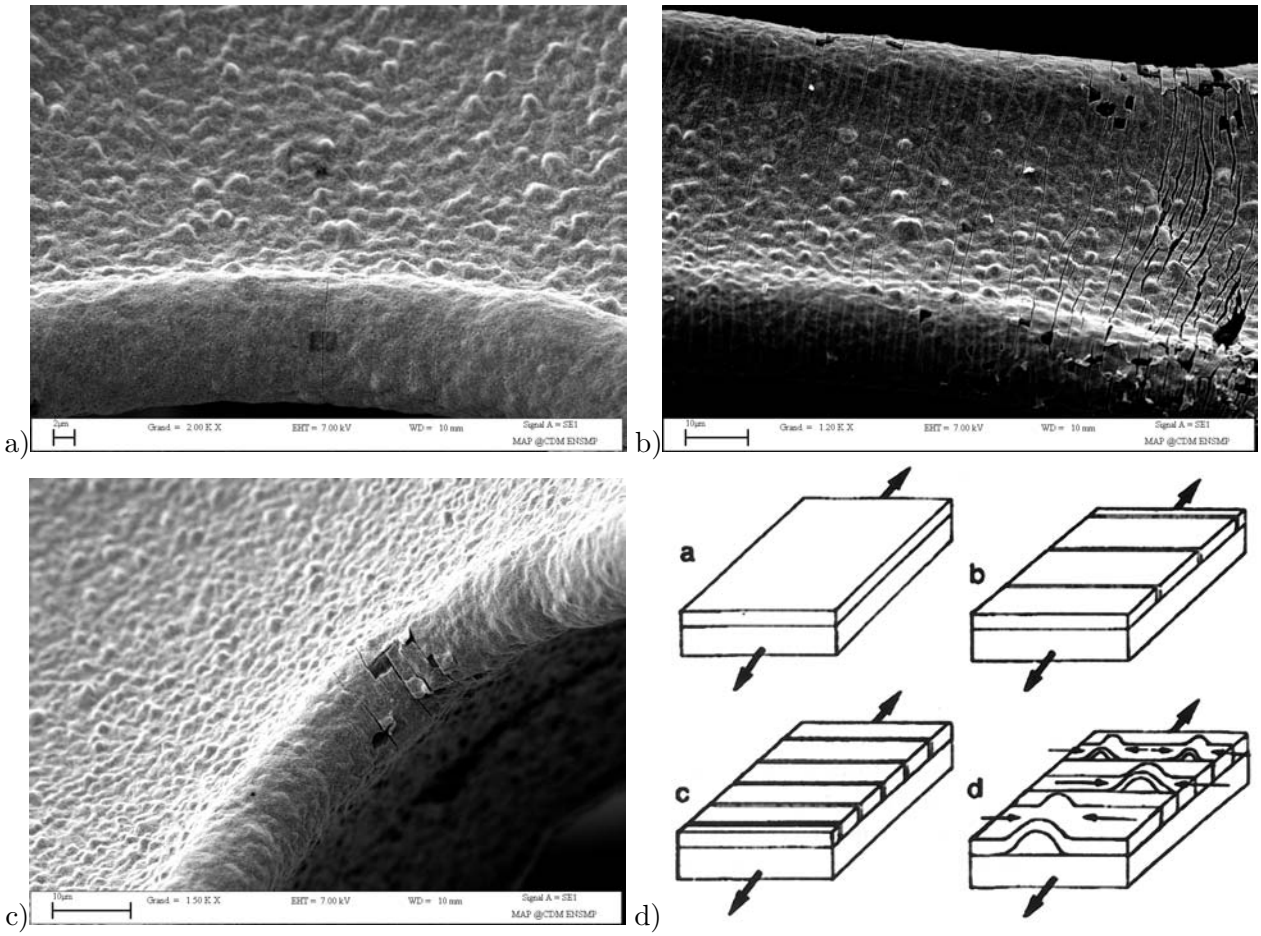



**Figure IV.17** : Mécanisme de rupture de l'oxyde de nickel : a) apparition des premières fissures, b) densité de fissures maximale, c) décollement de la couche d'oxyde, d) évolution de la rupture d'un film de nickel oxydé au cours d'un essai de flexion trois points (Bernard et al., 2002).

*Remarque : il a été vérifié que la couche d'oxyde ne comportait aucune fissure avant traction. L'état de surface de la mousse oxydée avant sollicitation est présenté à la figure IV.18.*

Bernard et al. (Bernard et al., 2002) ont étudié le comportement mécanique et de rupture d'un film de nickel oxydé au cours d'un essai de flexion trois points. Le schéma de la figure IV.17d explique les différents mécanismes d'endommagement qu'ils ont observés. Tout d'abord, les fissures, parallèles entre elles, apparaissent progressivement dans la couche d'oxyde de nickel. Elles sont débouchantes dans l'épaisseur de la couche d'oxyde et leur propagation s'effectue suivant le mode I (*i.e.* perpendiculairement à l'interface métal/oxyde). Lorsque la densité de fissures, perpendiculaires à la direction de sollicitation, arrive à

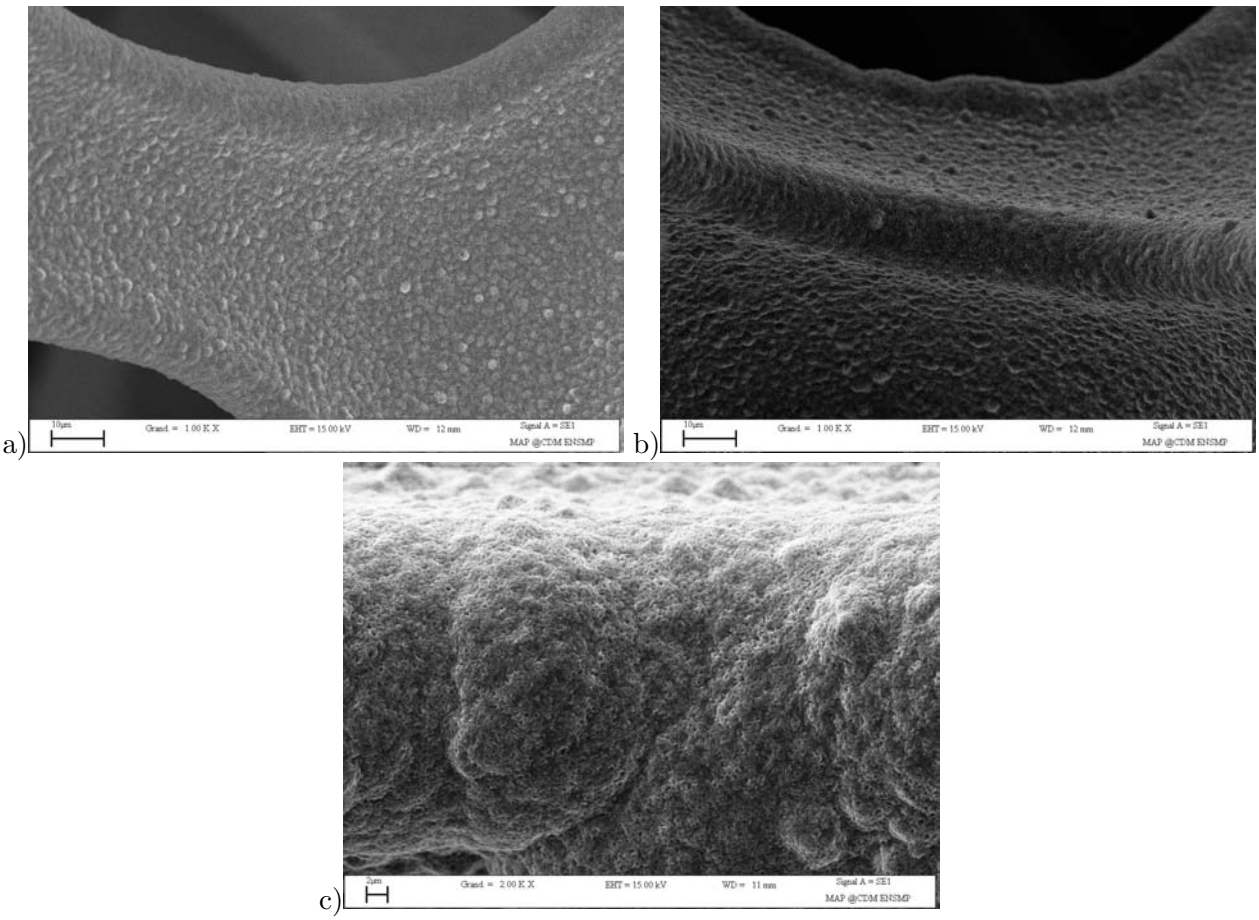



**Figure IV.18** : Eprouvette témoin – mousse MN 110-042-16 oxydée non tractionnée.

saturation, un phénomène d'écaillage se produit. Les contractions latérales du substrat propagent les fissures le long de l'interface et provoquent le décollement de la couche d'oxyde. Les mêmes phénomènes, que ceux observés par Bernard et al., sont visibles lors de la déformation des mousses (voir figure IV.17a–c).

*Remarque : l'oxydation partielle des mousses de nickel est un moyen de visualiser les hétérogénéités de déformation des mousses. En effet, la localisation et la densité de fissures indiquent quels sont les brins qui se déforment préférentiellement. Comme l'illustre la photographie de la figure IV.19d, la déformation est d'abord localisée à l'extrémité des brins proches des nœuds. Ceci confirme les observations des mécanismes d'endommagement, réalisées à la partie A, sur les mousses de nickel non oxydées.*

Selon Bernard et al., la couche d'oxyde de nickel se divise en deux parties d'égale épaisseur. La couche d'oxyde colonnaire est située au contact avec l'extérieur, tandis que la couche d'oxyde équi-axe est positionnée entre la couche colonnaire et celle du nickel pur. La propagation des fissures s'effectue entre les deux couches d'oxyde. Le délaminage de la couche d'oxyde n'apparaît pas à l'interface entre le nickel et l'oxyde mais entre la couche d'oxyde équi-axe et colonnaire. De plus, les fissures des couches d'oxyde ne se propagent pas dans le substrat en nickel. Les deux couches d'oxyde n'ont pas été repérées sur les mousses de nickel. Cependant, sur la figure IV.19c, on peut voir qu'en pointe de fissure, la couche d'oxyde est bien toute fissurée avant que le nickel ne se déchire.

L'oxydation est présente à l'extérieur et à l'intérieur des brins (voir figure IV.19a–b). Sur la figure IV.19a, l'épaisseur de la couche d'oxyde externe est de l'ordre de 0,5 $\mu$m, ce qui correspond à une épaisseur $e$

de 1 $\mu$m. Pour une mousse oxydée à 2,6 % en masse, on obtient à partir de l'équation (IV.174), une épaisseur normalisée $e^*$ de 0,138 (soit une épaisseur $e$ de 1,38 $\mu$m en considérant les brins comme pleins).

*Remarque : la couche d'oxyde interne est prise en compte dans le modèle par l'épaisseur* $2e$*, qui correspond à l'épaisseur totale des couches d'oxydes interne et externe.*

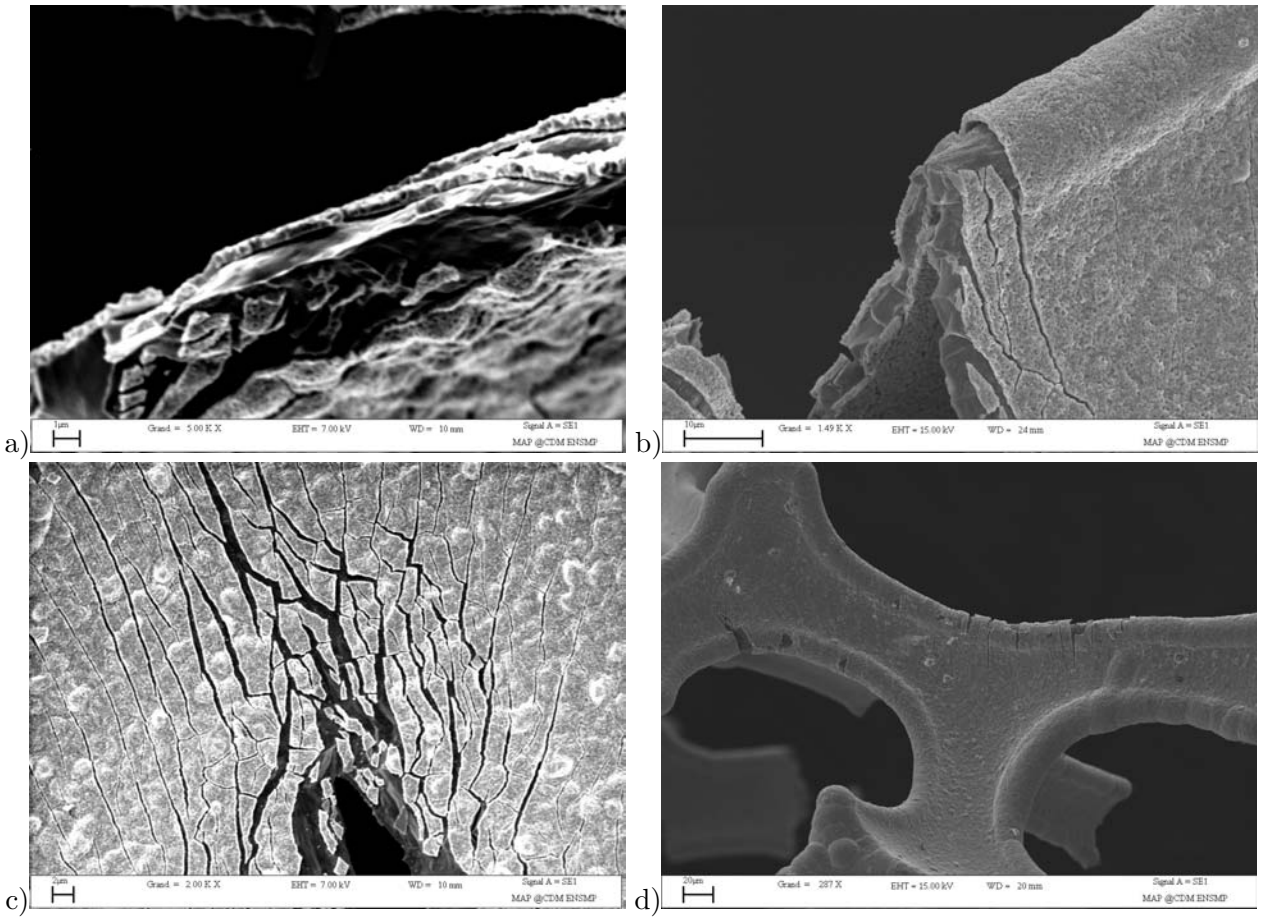



**Figure IV.19** : Mousse MN 110-042-16 oxydée.

Bernard et al. (Bernard et al., 2002) trouvent que la distance caractéristique entre deux fissures tend vers une valeur constante. Cette valeur varie linéairement avec l'épaisseur de la couche d'oxyde. En extrapolant les résultats de Bernard et al. pour de faibles épaisseurs de la couche d'oxyde (0,5 $\mu$m), une longueur caractéristique entre 2,3 et 4 $\mu$m est trouvée. Ces valeurs sont cohérentes avec les observations de la figure IV.17b, où la distance caractéristique est de l'ordre de 2,1 $\mu$m.

Afin d'introduire une loi d'écrouissage pour retranscrire la rupture progressive de la couche d'oxyde de nickel, un calcul 2D de flexion de poutre biphasée est réalisé par la méthode des éléments finis. Ce calcul est englobé dans un programme automatique écrit en langage C (voir Annexe E).

A partir de la déformation maximale de la mousse souhaitée, le programme calcule l'angle de rotation de la section située à l'extrémité de la poutre nécessaire pour réaliser la flexion. La densité de la mousse et le gain en masse sont des entrées du programme qui permettent de déduire les valeurs de l'épaisseur et de l'épaisseur normalisée. Ainsi, avec le nombre d'éléments désirés pour le calcul de la flexion de la poutre, le programme génère automatiquement le maillage de la poutre biphasée avec les bonnes épaisseurs.

Puis, le calcul de flexion de la poutre est lancée automatiquement à partir du (.inp). Pour réaliser la flexion de la poutre, les conditions limites sont les suivantes :

- la section à mi-poutre ne peut se déplacer que verticalement. Le déplacement horizontal est bloqué de par la symétrie de la poutre.
- une rotation de la section, située à l'extrémité de la poutre, est imposée autour de son point central, positionné au milieu de celle-ci. Tout mouvement vertical du point central de la section "extrémité" est bloqué.

Ainsi, lors de la rotation de la section située à l'extrémité de la poutre, cette dernière ne peut se déplacer qu'horizontalement, ce qui entraîne une translation verticale de la section à mi-poutre. Le déplacement du point central de la section à mi-poutre constitue la flèche.

Le moment et la flèche sont ensuite extraits du calcul par éléments finis. Après avoir transformé la relation moment/flèche au niveau de la poutre en relation contrainte/déformation au niveau de la mousse grâce aux lois d'échelles présentées pour le modèle analytique, la courbe résultante est tracée. Sur la figure IV.20, la relation ($\sigma$ ; $\varepsilon$) déduite du calcul par éléments finis est superposée à celle du modèle analytique (pour un cœur élastoplastique et une couche élastique). Elles donnent bien le même résultat.

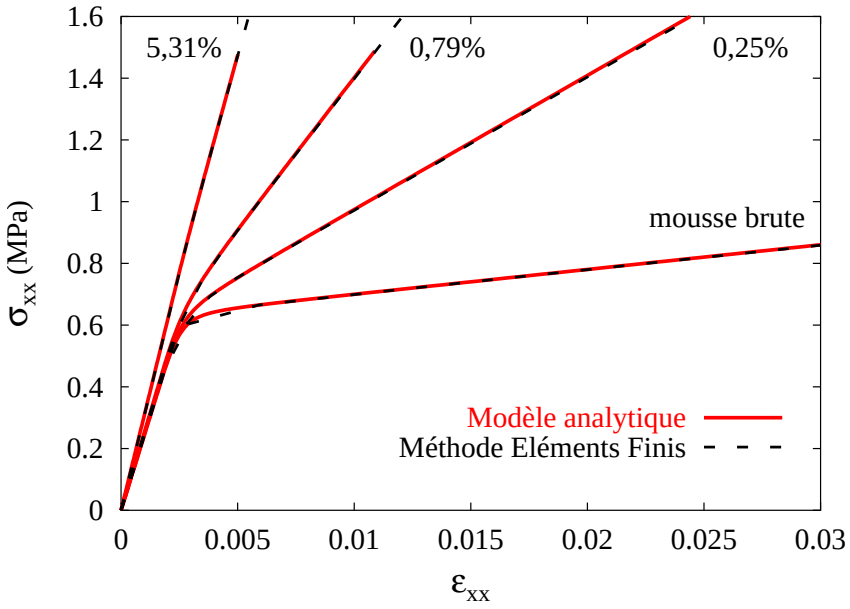



**Figure IV.20** : Calcul du comportement des mousses oxydées à l'aide du modèle analytique et de la méthode des éléments finis.

Maintenant que l'on a vérifié que le calcul par éléments finis donne bien le résultat trouvé analytiquement, le comportement de la couche d'oxyde de nickel est amélioré afin de retranscrire sa rupture. A la place du comportement élastique linéaire simple, on choisit de modéliser la couche d'oxyde de nickel par un matériau élastoplastique. Une loi d'écrouissage isotrope non-linéaire est alors introduite.

$$\sigma_y = \sigma_0 + Q\,(1 - \exp(-bp)) \tag{IV.184}$$

Cette loi non linéaire cherche à traduire l'endommagement progressif de la couche d'oxyde. En étudiant la flexion d'un film NiO/Ni (pour une épaisseur de couche d'oxyde variant entre 1 et 5 $\mu$m), Bernard et al. (Bernard et al., 2002) trouve que la déformation correspondant à l'activation d'une première fissure transversale, se situe autour de 0,3 %. Cette déformation correspond à une contrainte de 660 MPa.

La valeur de $\sigma_0$ est fixée à 600 MPa. Les deux autres valeurs, $Q$ et $b$, sont identifiées à partir de la courbe expérimentale de la mousse oxydée à 0,25 %. Les valeurs des constantes trouvées sont données ci-dessous :

$$\begin{array}{lcl} \sigma_0 & = & 600 \text{ MPa} \\ Q & = & 420 \text{ MPa} \\ b & = & 230 \end{array} \qquad \text{(IV.185)}$$

La figure IV.21 représente la loi d'écrouissage introduite dans le comportement de la couche d'oxyde de nickel. Il n'est pas nécessaire d'introduire un adoucissement lié à l'endommagement pour décrire les essais. La rupture de la couche d'oxyde dans les mousses se traduit par un écart grandissant au comportement linéaire élastique de l'oxyde. Cet écart est une fonction de la densité de brins endommagés. Plus le nombre de brins endommagés est grand, plus l'écart est important.

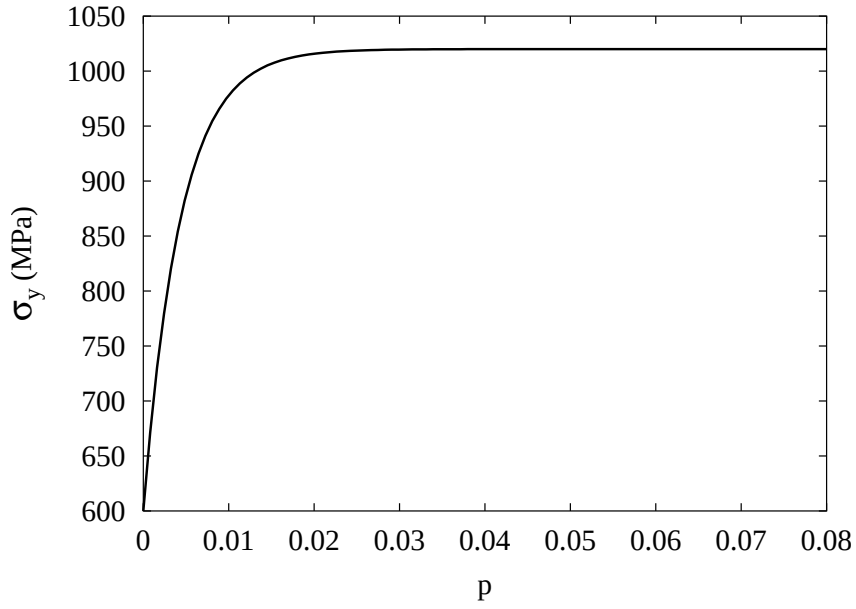



**Figure IV.21** : Comportement de la couche d'oxyde de nickel.

Les courbes de la figure IV.22 représentent le comportement des mousses en fonction de leur degré d'oxydation, avec un comportement non linéaire de la couche d'oxyde.

La figure IV.22 montre qu'il est bien possible de prévoir le comportement des mousses oxydées en prenant en compte la rupture de la couche d'oxyde. Le modèle à deux phases permet également de prédire le comportement de mousses de nickel revêtues. Les mousses de nickel, revêtues d'une couche limitant la corrosion, sont envisagées pour de nouvelles applications. Par exemple, leur utilisation dans le secteur automobile, pour la fabrication de pots catalytiques, est à l'étude. Le modèle à deux phases est donc un outil pouvant servir à la caractérisation mécanique de ces nouveaux types de mousses.

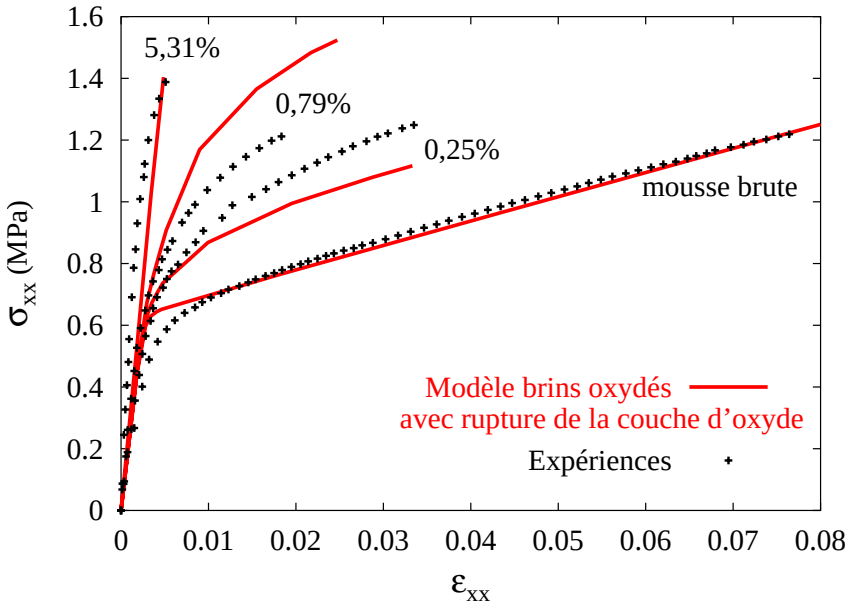



**Figure IV.22** : Simulation du comportement des mousses oxydées – mousse initiale de nickel MN 110-042-16 – sollicitation suivant la direction RD de la mousse.

## IV.6 Synthèse des principaux résultats de la deuxième partie

Les principaux résultats de la deuxième partie sont résumés sous formes de tableaux. Deux aspects du comportement mécanique des mousses de nickel en traction ont été abordés dans cette partie. Premièrement, les principales grandeurs mécaniques des mousses de nickel ont été déterminées expérimentalement en fonction du grammage, puis elles ont été confrontées aux expressions des modèles analytiques de flexion des brins développés.

**• EXPERIENCES**

| Type de mousse | Sens de prélèvement | $E^*$ (MPa) | $H^*$ (MPa) | $\sigma^*_{0,2\%}$ (MPa) |
|---|---|---|---|---|
| MN 110-035-16 | RD | 303 ±10 | 5,6 ± 0,9 | 0,51 |
| | TD | 116 ± 3 | 2,9 ± 0,25 | 0,27 |
| MN 110-042-16 | RD | 389 ± 21 | 7,6 ± 0,3 | 0,57 |
| | TD | 161 ± 7 | 3,7 ± 0,1 | 0,34 |
| MN 110-050-16 | RD | 537 ± 29 | 8,9 ± 0,9 | 0,74 |
| | TD | 182 ± 8 | 4,2 ± 0,15 | 0,36 |

**• MODELISATION**

La même démarche que celle employée par Gibson et Ashby (Gibson et Ashby, 1997) est utilisée pour décrire le comportement des mousses de nickel en traction. Le modèle est fondé sur la flexion élastoplastique des poutres. Trois familles de poutres de longueurs $a$, $b$ et $c$ sont considérées.

| | |
|---|---|
| Module de Young | $E^*_{RD} = \dfrac{16}{B}\dfrac{C}{c^4}\dfrac{I}{a}\dfrac{b}{}\left(1+\left(\dfrac{c}{a}\right)^3\right)E_{Ni}$ |
| Module plastique | $H^*_{RD} = \dfrac{16}{B^p}\dfrac{C}{c}\dfrac{I}{a}\dfrac{b}{}\left(1+\left(\dfrac{c}{a}\right)^3\right)H_{Ni}$ |
| Limite d'élasticité | $\sigma^*_{0\,RD} = C\left(\dfrac{64}{3}\right)^{1/4}\dfrac{I^{3/4}}{c\ a}\left(1+\dfrac{a}{c}\right)\sigma_{0\,Ni}$ |

avec :

$I$, le moment d'inertie de la poutre ;

$C$, la constante de changement d'échelle associée au passage entre le moment de flexion de la poutre et la contrainte macroscopique de la mousse ;

$B$, la constante de changement d'échelle associée au passage entre la flèche de la poutre et la déformation macroscopique de la mousse ;

$B^p$, la constante de changement d'échelle associée au passage entre la flèche plastique de la poutre et la déformation plastique macroscopique de la mousse.

Le comportement élastoplastique des mousses de nickel est bien décrit à partir des équations suivantes :

$$
\begin{cases}
\bullet\ \sigma^* = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{1/4} \left(\dfrac{C\ E_{Ni}\ \sigma_{0Ni}}{E_{Ni}+H_{Ni}}\right) \left(\dfrac{I^{3/4}}{a^2\ c}\right) \left[3-\alpha_a^{*2}+\dfrac{2H_{Ni}}{E_{Ni}\alpha_a^*}+\left(\dfrac{a}{c}\right)\left(3-\alpha_c^{*2}+\dfrac{2H_{Ni}}{E_{Ni}\alpha_c^*}\right)\right] \\
\bullet\ \alpha_a^{*2}\mathcal{A}_{RD}+\alpha_c^{*2}\mathcal{B}_{RD}+\left[\dfrac{E_{Ni}+H_{Ni}}{\sigma_{0Ni}}\ \varepsilon^*-3\left(\mathcal{A}_{RD}+\mathcal{B}_{RD}\right)\right]+\dfrac{1}{\alpha_a{}^*}\left[-\dfrac{2H_{Ni}}{E_{Ni}}\mathcal{A}_{RD}-\dfrac{B^p\left(E_{Ni}+H_{Ni}\right)}{8\ (12)^{1/4}\ E_{Ni}}\left(\dfrac{a^2}{b\ I^{1/4}}\right)\right] \\
\quad +\dfrac{1}{\alpha_c{}^*}\left[-\dfrac{2H_{Ni}}{E_{Ni}}\mathcal{B}_{RD}-\dfrac{B^p\left(E_{Ni}+H_{Ni}\right)}{8\ (12)^{1/4}\ E_{Ni}}\left(\dfrac{c^2}{b\ I^{1/4}}\right)\right]=0 \\
\quad \mathcal{A}_{RD}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{1/4}\left(\dfrac{C\ E_{Ni}}{E^*_{RD}}\right)\left(\dfrac{I^{3/4}}{a^2\ c}\right)-\left(\dfrac{B^p}{16\,(12)^{1/4}}\right)\left(\dfrac{a^2}{b\ I^{1/4}}\right) \\
\quad \mathcal{B}_{RD}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{1/4}\left(\dfrac{C\ E_{Ni}}{E^*_{RD}}\right)\left(\dfrac{I^{3/4}}{a\ c^2}\right)-\left(\dfrac{B^p}{16\,(12)^{1/4}}\right)\left(\dfrac{c^2}{b\ I^{1/4}}\right) \\
\bullet\ \alpha_a^{*2}-\left(\dfrac{c}{a}\right)^2\alpha_c^{*2}+\dfrac{2}{\alpha_a^*}-\dfrac{2}{\alpha_c^*}\left(\dfrac{c}{a}\right)^2-3\left(1-\left(\dfrac{c}{a}\right)^2\right)=0
\end{cases}
$$

Avec ce modèle élastoplastique anisotrope à brins pleins, la globalité de la courbe de traction des mousses de nickel peut être décrite. La modélisation des brins creux n'a pas montré d'amélioration de la partie non-linéaire de la courbe. La non-linéarité du comportement mécanique des mousses n'est donc pas seulement due à l'arrivée et à la propagation du front plastique dans les brins.

Le modèle a aussi été amélioré pour permettre de reproduire le comportement des mousses à deux phases. Le pouvoir prédictif de ce modèle a été illustré dans le cas des mousses oxydées.

De plus, le modèle à deux phases a montré que le dépôt d'une couche mince peut apporter, en déformation élastique, une rigidité supplémentaire à la mousse. Pour de faibles épaisseurs de couche, l'équation (IV.162) s'écrit en faisant un développement limité en $e^*$ :

$$E^{*ee}_{RD} = \mathcal{K}\ t^4\left[E_1+3\ e^*\ (E_2-E_1)\right] \tag{IV.186}$$

L'augmentation du module de la mousse due à la couche déposée en surface est alors, en pourcentage, de $3\ e^*\ \left(\dfrac{E_2}{E_1}-1\right)$. Pour une couche dont son module de Young est le double de celui du nickel ($E_2 = 2E_1$), l'augmentation de la rigidité de la mousse est le triple de la valeur de l'accroissement de l'épaisseur. Par exemple, si l'épaisseur de la couche correspond à 1 % de l'épaisseur du brin, le module de Young de la mousse est augmenté de 3 %.

*Remarque : les expressions suivant les directions TD et ND se déduisent par permutation.*

| *Sens de sollicitation* | *Permutation* |
|---|---|
| *TD* | $a \longleftrightarrow b$ |
| *ND* | $b \longleftrightarrow c$ |

## Partie C

# COMPORTEMENT MULTIAXIAL DES MOUSSES DE NICKEL

Cette troisième et dernière partie est consacrée à la déformation de la mousse suivant ces trois axes principaux. Tout d'abord, le comportement de la mousse et sa variation de volume au cours d'un essai de traction sont étudiés.

Pour ce faire, des mesures tridirectionnelles sont proposées. Ces essais mettent en œuvre une extensométrie "traditionnelle" à trois capteurs, ce qui permet d'obtenir simultanément les valeurs des trois dimensions instantanées de l'éprouvette. Grâce à ce dispositif, la variation de volume et les coefficients d'expansion plastique sont déterminés.

Une seconde partie expérimentale porte sur la visualisation des champs de déformation et de contrainte à la surface de la mousse. Ces essais photomécaniques poursuivent deux buts bien distincts.

- La mousse présente-t-elle des hétérogénéités de déformation ?
- Quelle est la perturbation engendrée par un trou "macroscopique" dans une plaque de mousse ?

Les champs de déformation issus des essais photomécaniques sont aussi utilisés à titre comparatif, de façon qualitative et quantitative, face aux champs de déformation issus de la modélisation. La mousse, modélisée par un milieu continu, est alors assimilée à un milieu homogène équivalent. Dans un premier temps, une modélisation classique, utilisant un critère de plasticité elliptique, est étudiée. Puis, après avoir montré les limites du modèle classique, un modèle micromorphe est présenté. L'extension de la modélisation classique vers un milieu micromorphe permet d'envisager une modélisation plus proche du comportement des mousses. Tout d'abord, les recherches se focaliseront sur les caractéristiques de ces milieux mécaniques généralisés aux abords d'un trou dans le cas élastique, puis l'application au comportement des mousses de nickel sera alors envisagée. Enfin, le modèle sera appliqué au cas de la rupture des mousses. L'objectif est d'obtenir des résultats de simulations par éléments finis qui ne dépendent pas du maillage et d'arriver à reproduire la largeur de la zone de fissure.

# Chapitre V

# Essais mécaniques – Comportement multiaxial des mousses de nickel à cellules ouvertes

**Sommaire**


**V.1 Contractions latérales des mousses : mesures tridirectionnelles par extensométrie traditionnelle . . . . . 145**

V.1.1 Conditions expérimentales . . . . . 146

V.1.2 Coefficients d'expansion latérale plastique . . . . . 147

**V.2 Mesures de champs par corrélation d'images : extensométrie sans contact . 150**

V.2.1 Dispositif expérimental . . . . . 151

V.2.2 Champs de déformation d'une éprouvette rectangulaire de mousse . . . . . 153

V.2.3 Champs de déformation autour d'un trou "macroscopique" . . . . . 156


Dans ce chapitre, deux types d'essais mécaniques sont mis en œuvre pour connaître le comportement multiaxial des mousses de nickel lors d'un essai de traction. La première catégorie emploie des capteurs à jauges et un capteur potentiométrique, tandis que la seconde série de tests utilise une méthode optique de corrélation d'images numériques. L'objectif de ces essais mécaniques est de servir de base expérimentale à l'application d'un modèle continu. Les coefficients d'expansion latérale plastique sont déterminés suivant les deux techniques. La méthode de corrélation d'images permet en outre de déterminer les champs de déformation bidimensionnelle de la surface de la mousse.

Dans cette partie, l'extensométrie à capteurs mécaniques est qualifiée de "traditionnelle" par opposition aux essais d'extensométrie sans contact.

## V.1 Contractions latérales des mousses : mesures tridirectionnelles par extensométrie traditionnelle

Au cours d'un essai de traction, les déformations suivant les trois directions sont mesurées simultanément à l'aide d'extensomètres posés directement sur la mousse. Ces mesures tridirectionnelles servent à évaluer les contractions latérales (variations d'épaisseur et de largeur) des mousses au cours d'un essai de traction,

et par suite à l'identification des coefficients du modèle élastoplastique anisotrope compressible, utilisé au chapitre VI.

La nomenclature adoptée dans ce travail de recherche est définie comme suit. L'axe 1 représente l'axe de sollicitation. Les réductions de largeur et d'épaisseur sont mesurées respectivement suivant les axes 2 et 3.

### V.1.1 Conditions expérimentales

Comme on peut le voir sur la figure V.1a, le dispositif expérimental comprend :

- une machine de traction INSTRON, sur laquelle est montée une cellule de charge de 50 daN ;
- un PC d'acquisition ;
- trois capteurs pour mesurer les déplacements dans les trois directions.

Les capteurs de mesure des déplacements sont de deux types. Un capteur potentiométrique est utilisé pour mesurer l'allongement dans la direction de sollicitation de la mousse et deux capteurs à jauges mesurent les variations de largeur et d'épaisseur de l'éprouvette. Le choix des capteurs est dicté par la course nécessaire, leur précision et leur légèreté. En effet, le capteur potentiométrique possède une précision moindre par rapport aux deux capteurs à jauges, mais sa course est plus grande. L'essai de traction suivant la direction transverse TD (déformation à rupture autour de 16 %) peut donc être suivi dans son ensemble à l'aide de ce capteur. Il est maintenu grâce à une fixation en matière plastique "plexiglas", serrée sur la mousse (voir figure V.1b). Les capteurs à jauges se terminent par des surfaces planes de quelques millimètres de côté. Ils sont maintenus en contact sur la mousse à l'aide d'une tige de fer souple ou d'un élastique.

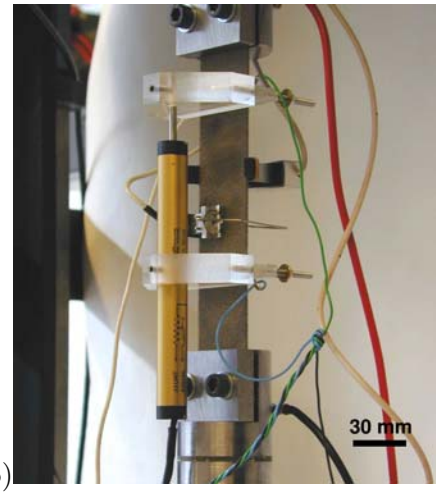
a) b) 


**Figure V.1** : Dispositif expérimental des mesures tridirectionnelles par extensométrie traditionnelle : a) vue générale, b) positionnement des trois capteurs de mesure.

*Remarque : le positionnement des capteurs sur l'éprouvette n'entraîne pas de localisation de la déformation. L'amorçage et la propagation de fissures se produisent aléatoirement dans toute la zone utile de l'éprouvette.*

Les éprouvettes, de forme rectangulaire, sont découpées à la scie circulaire. Leurs dimensions sont les suivantes : $170 \times 30 \times 1,6$ mm$^3$. Tous les essais sont effectués à température ambiante et à vitesse de traverse constante (18 mm/min).

### V.1.2 Coefficients d'expansion latérale plastique

A partir de ce dispositif expérimental, les trois courbes de variations de la géométrie de l'éprouvette lors d'un essai de traction sont obtenues simultanément. La figure V.2 représente le résultat d'un essai de traction pour la mousse MN 110-042-16. Pour les autres grammages, l'allure des courbes et les constatations sont similaires (voir figure V.3). Seules les contraintes et allongements à rupture diffèrent suivant le type d'échantillons.

Les courbes de la figure V.2 montrent que l'effet d'anisotropie sur la déformation à rupture est plus prononcé suivant l'axe 1 que suivant les axes 2 et 3. De plus, lorsque la mousse est sollicitée suivant la direction RD, la déformation à rupture est de l'ordre de 6 % suivant l'axe 1 tandis qu'elle se situe autour de 3 % suivant les axes 2 et 3. Les contractions latérales et les variations d'épaisseur compensent donc l'allongement de l'éprouvette. La transformation suivant la direction RD est une transformation quasiment isochore ($Tr(\varepsilon) = 0$, voir figure V.4). Les mousses de nickel se comportent donc comme un matériau incompressible lors d'une sollicitation en traction suivant la direction RD.

En revanche, lorsque la mousse est sollicitée suivant la direction transverse TD, la déformation à rupture suivant l'axe 1 est de 16 % tandis qu'elle n'est que d'environ 4 % suivant les axes 2 et 3. Les contractions latérales et les variations d'épaisseur ne suffisent donc pas à compenser l'allongement de l'éprouvette. Le volume de l'éprouvette s'accroît au cours de la traction. La figure V.4 confirme qu'il a augmenté de 8 % à la fin de l'essai de traction. Les mousses de nickel se comportent comme un matériau compressible lors d'une sollicitation en traction suivant la direction transverse TD.

La mousse de nickel est donc un matériau compressible.

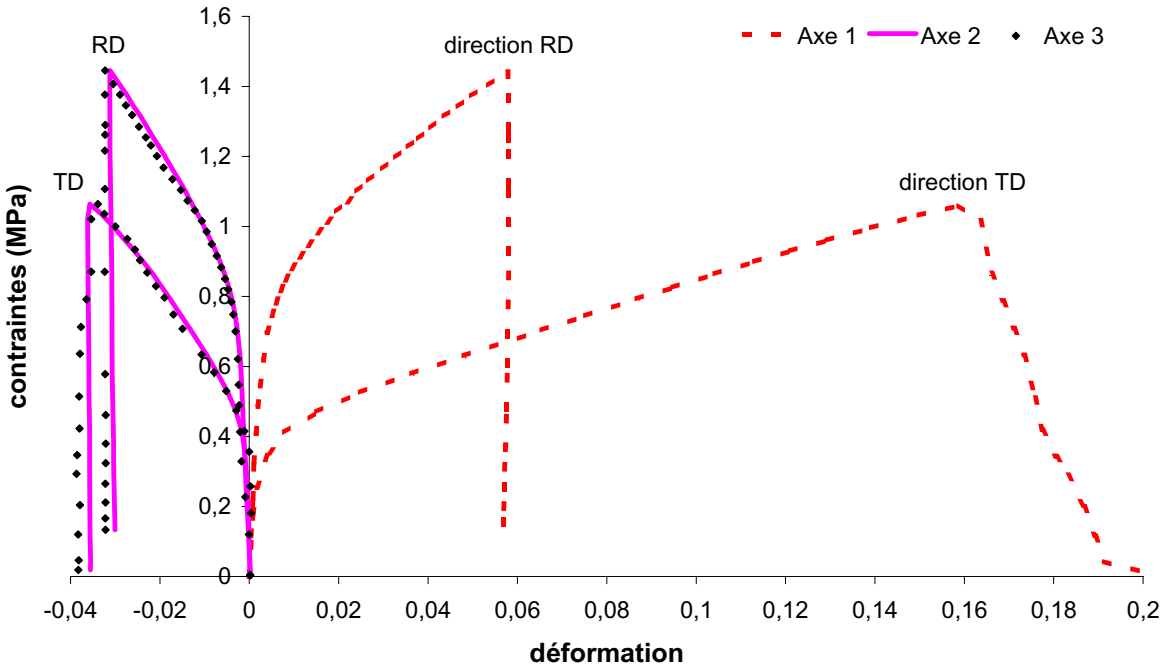
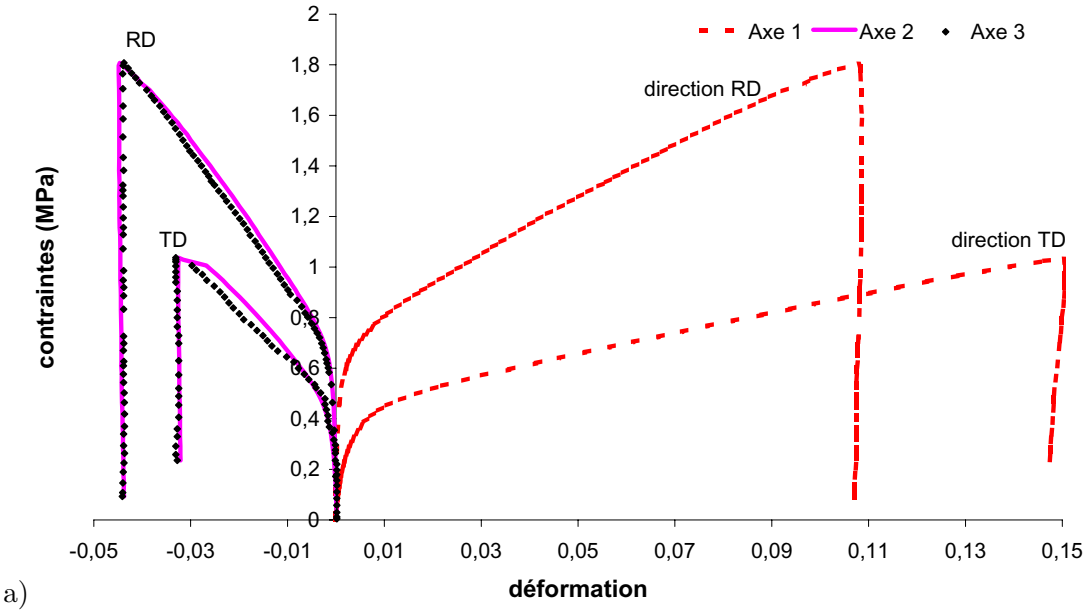
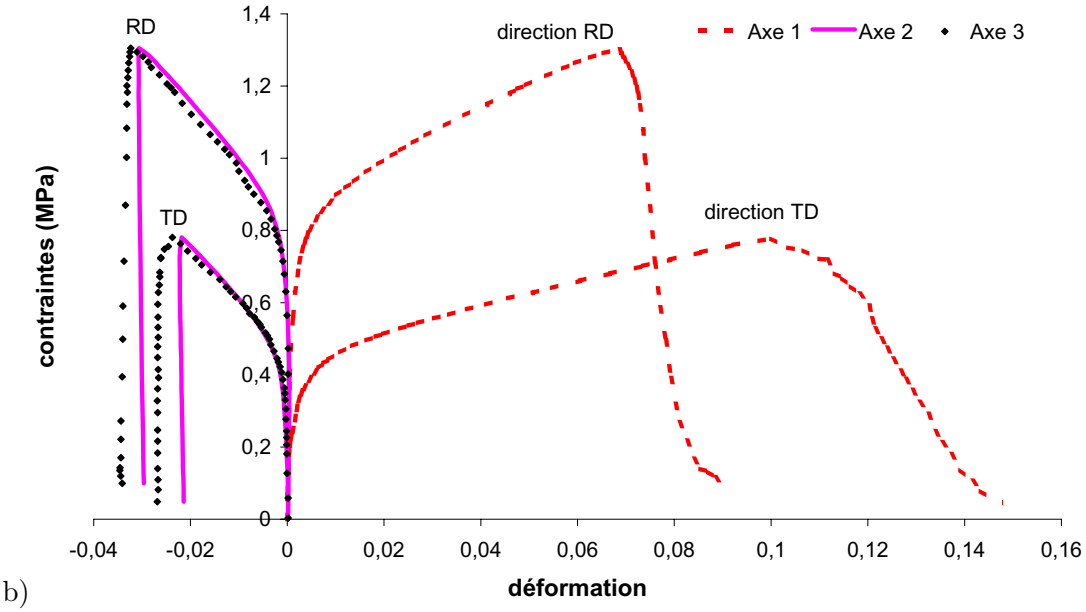



**Figure V.2** : Courbes expérimentales obtenues par extensométrie traditionnelle : mousse MN 110-042-16.




a)




b)

**Figure V.3** : Courbes expérimentales obtenues par extensométrie traditionnelle : a) mousse MN 110-050-16, b) mousse MN 110-035-16.

En représentant les courbes de la figure V.2 dans le repère des déformations ($\varepsilon_{11}$ ; $\varepsilon_{22}$) ou ($\varepsilon_{11}$ ; $\varepsilon_{33}$). les coefficients d'expansion latérale plastique $\nu^p_{12}$ et $\nu^p_{13}$ sont obtenus à chaque instant (voir figure V.5).

$$\nu^p_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \qquad \text{et} \qquad \nu^p_{13} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} \tag{V.1}$$

*Remarque : les coefficients d'expansion latérale plastique ont été déterminés à partir de toute la courbe. En ne considérant que la partie élastique, les mêmes résultats sont obtenus.*

Les valeurs des coefficients d'expansion latérale plastique en fonction du type de mousse sont données dans le tableau V.1. Les valeurs trouvées de $\nu^p_{12}$ et $\nu^p_{13}$ sont similaires (ce qui est visible sur les courbes de la figure V.5). Une seule valeur est donc donnée pour les deux coefficients dans le tableau V.1.

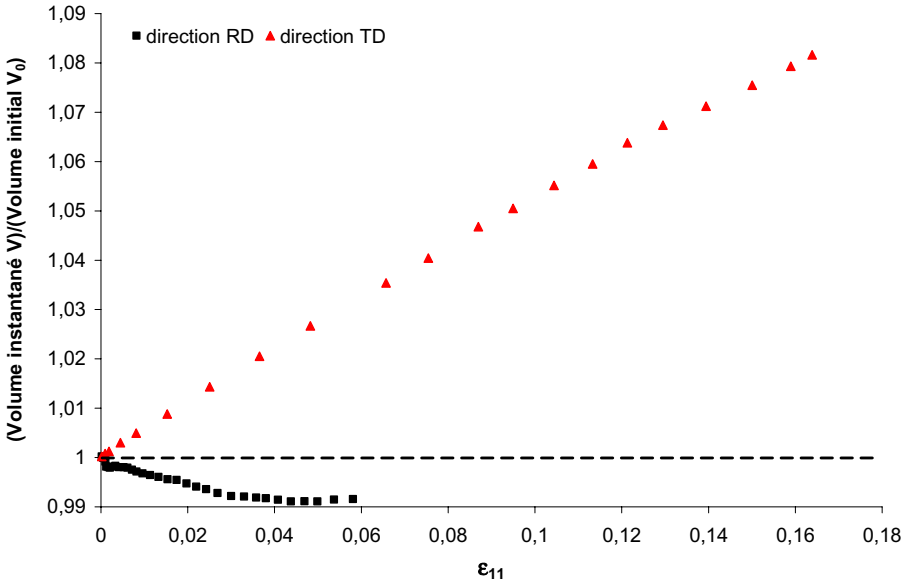



**Figure V.4** : Augmentation du volume de l'éprouvette au cours d'un essai de traction suivant la direction transverse TD – mousse MN 110-042-16.

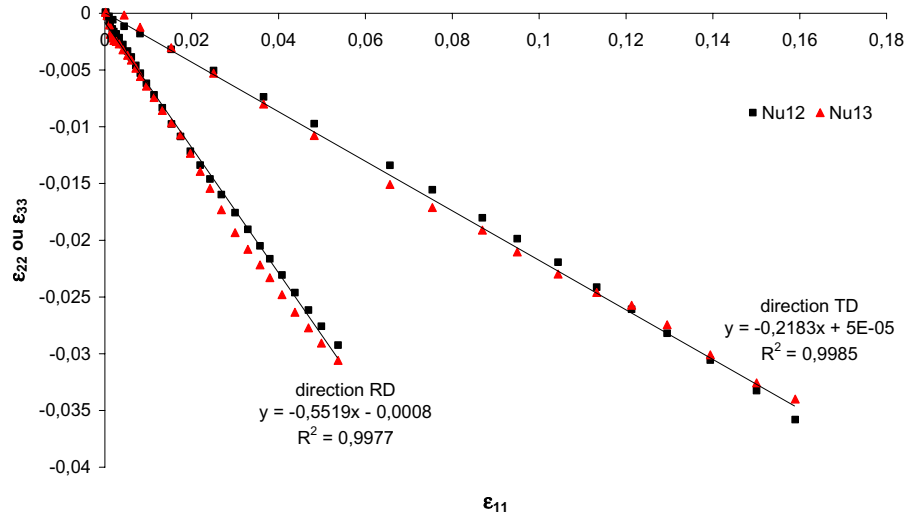



**Figure V.5** : Coefficients d'expansion latérale plastique de la mousse MN 110-042-16.

Les valeurs des coefficients d'expansion latérale plastique sont proches de 0,5 suivant la direction RD et de 0,2 suivant la direction TD. On retrouve le comportement incompressible de la mousse suivant la direction RD et compressible suivant la direction TD.

*Remarque : dans le cas des mousses d'aluminium à cellules fermées, on trouve un coefficient d'expansion latérale nul en compression (Gibson, 2000; Blazy, 2003). Lors d'un essai de compression simple, la dimension de la section de l'éprouvette reste quasi-constante.*

| | Direction RD | Direction TD |
|---|---|---|
| Type de mousse | $\nu_{12}^p \quad \nu_{13}^p$ | $\nu_{12}^p \quad \nu_{13}^p$ |
| MN 110-035-16 | 0,5 ± 0,09 | 0,24 ± 0,02 |
| MN 110-042-16 | 0,53 ± 0,06 | 0,23 ± 0,03 |
| MN 110-050-16 | 0,40 ± 0,03 | 0,19 ± 0,02 |

**Tableau V.1** : Valeurs des coefficients d'expansion latérale plastique.

## V.2 Mesures de champs par corrélation d'images : extensométrie sans contact

La technique d'extensométrie traditionnelle, utilisée au paragraphe précédent, possède deux défauts majeurs :

1. les mesures des déformations sont "ponctuelles" ou assimilées comme telles (car les zones d'appui des capteurs ont des dimensions réduites)

2. le contact entre la mousse et les extensomètres n'est pas toujours optimal, compte tenu de la porosité élevée des mousses (96 % de vide).

De plus, les mousses sont des matériaux facilement endommageables, sur lesquels, une fixation efficace des extensomètres, *i*.e. l'interdiction de tout glissement des capteurs au cours de l'essai tout en préservant les cellules, reste délicat.

Des essais photomécaniques, mettant en œuvre une extensométrie sans contact et utilisant l'aptitude naturelle des mousses à la corrélation d'images (voir figure V.6), ont donc été mis au point au Centre des Matériaux pour répondre à ces exigences.
Ce mouchetis "aléatoire" naturel fait des mousses de nickel de bons candidats à la technique de corrélation d'images numériques.

*Remarque : le mouchetis "aléatoire" naturel de la surface des mousses de nickel est diminué pour les échantillons testés. En effet, tous les échantillons de mousse sont recouverts de poudre de graphite. Cette précaution a pour but de limiter les reflets et l'influence de la structure cellulaire, même si, comme on peut le voir à la section F.3, les effets tridimensionnels de la mousse restent limités. Cette mesure est sans effet sur le comportement de la mousse.*

Les premiers essais photomécaniques sur les mousses de nickel NiTECH ont été réalisés par Xavier Badiche en 1999, dans l'équipe de Patrick Ienny à l'Ecole des Mines d'Alès (Badiche et al., 1999). Ces essais portent sur différents échantillons de mousses de différents types (zone Nord, Sud, ...) et montrent la faisabilité d'une mesure du champ de déformation dans le cas des mousses. Fort de cette expérience et des objectifs de ce travail de recherche, il a été choisi de développer la méthode de corrélation d'images au Centre des Matériaux en partenariat avec l'Ecole des Mines d'Alès. Le matériel a donc été acheté (voir section V.2.1) et le logiciel de corrélation (CinEMA) prêté par l'Ecole des Mines d'Alès. Le Centre des Matériaux ne possédant aucune expérience dans le domaine de la photomécanique, des tests de validation de la mesure ont été effectués pour connaître les erreurs de la méthode ainsi que les erreurs liées à la spécificité du matériau cellulaire. L'ensemble de ces tests est donné en Annexe F.

Les buts des essais photomécaniques, appliqués au cas des mousses, sont multiples :

– s'affranchir des problèmes de contact entre l'extensomètre et la mousse ;

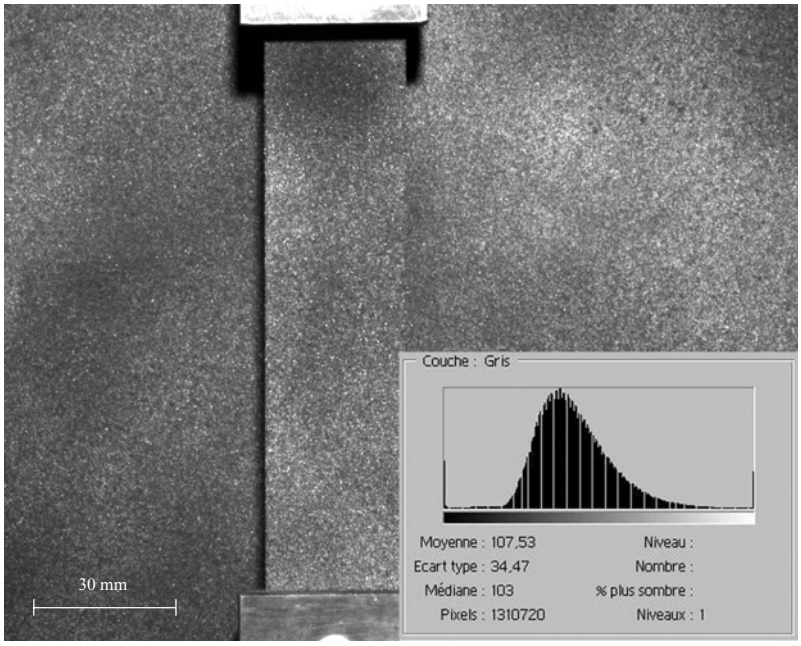



**Figure V.6** : Surface réelle de la mousse avec son histogramme en niveaux de gris associé.

- observer ou non l'existence d'hétérogénéités de déformations ;
- étudier le champ de déformation dans des zones de concentration de contraintes ;
- confronter directement les cartes des champs de déplacement ou de déformation expérimentale avec celles issues d'un calcul par éléments finis (voir chapitre VI).

Ces essais photomécaniques ont donc pour vocation d'avoir une vision continue de la mousse. L'échelle d'observation des champs de déformation ne se situe pas à l'échelle du brin, où les mouvements des brins apparaissent décorrélés entre eux, mais à l'échelle des cellules. On cherche à mettre en évidence le mouvement d'ensemble des cellules lors d'un essai de traction.

Afin de ne pas trop alourdir le manuscrit, le principe et le vocabulaire spécifique à la méthode de corrélation d'images numériques, ainsi que la procédure de dépouillement utilisée, sont reportés en Annexe F.

### V.2.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental nécessaire à la corrélation d'images numériques doit permettre d'acquérir une série d'images, en niveaux de gris de la surface de l'éprouvette, à différents stades de chargement. Le matériel utilisé est donc relativement simple (voir figure V.7).
Il se compose :

- d'une machine INSTRON sur laquelle est montée une cellule de charge de 500 N ;
- d'une caméra numérique CCD noir et blanc, haute résolution (1300 × 1030 pixels) à pixels carrés, jointifs, de 6,7 $\mu$m de côté ;
- d'une carte d'acquisition (GrabBit PCI), d'un logiciel d'acquisition d'images AnalySIS et d'un PC d'acquisition (PIII, 866 MHz) ;

- de différents objectifs (objectif standard NIKON 35-70 mm, TOKURA 18-28 mm, TAMRON 200 mm) ;
- d'une table à déplacement vertical à pas micrométrique, de course globale 100 mm et de vitesse maximale 40 mm/s ;
- d'une lumière blanche (2 spots de 30 W chacun et/ou 1 spot de 300 W).

*Remarque : la table à déplacement vertical sur laquelle est posée la caméra CCD n'est pas utilisée dans cette thèse. Cette table a pour fonction de suivre le déplacement du centre de l'éprouvette lors d'un essai de traction. En effet, la sollicitation mécanique est non symétrique par rapport à l'axe d'observation. Seule la traverse inférieure de la machine de traction est mobile. Le déplacement du centre de l'éprouvette est donc compensé, dans le même temps, par le déplacement de la caméra. Ainsi, le centre de l'éprouvette reste toujours au centre de l'image, et la zone centrale où l'on souhaite connaître les déplacements est toujours "corrélable" (car présente dans l'image). Compte tenu des faibles déformations à rupture des mousses de nickel, la table à déplacement vertical n'est d'aucune utilité. De plus, comme ce rattrapage mécanique ne suffit pas à éliminer complètement le mouvement de solide rigide, un calcul numérique du MSR (mouvement de solide rigide) est toujours nécessaire.*

a) b)

**Figure V.7** : Dispositif expérimental pour les essais photomécaniques.

Si le matériel utilisé est d'usage courant, le positionnement de la surface du CCD par rapport à celle de l'éprouvette doit être précis. En effet, la non-coplanarité entre la surface du CCD et de l'éprouvette engendre des effets de cisaillement. Une méthode de "triangulation" et l'utilisation d'une métrologie "classique" (mètre, règle, niveau à bulle) ont été employées pour positionner tous les éléments. Leur précision est suffisante pour les échelles d'observations considérées (supérieures à 15 $\mu$m/pixel).

La même procédure de réglage de la mise au point est observée pour tous les objectifs. Le diaphragme est tout d'abord ouvert au maximum (nombre d'ouverture $N = 2,8$) pour avoir une profondeur de champ faible. Ainsi, l'optimum de la mise au point est plus facile à apprécier. Une fois le réglage fin de la mise au point réalisé, le diaphragme est fermé au maximum ($N = 22$) pour augmenter la profondeur de champ et la plage de netteté. La réduction au maximum du diaphragme permet aussi de limiter les aberrations sphériques des objectifs. En revanche, la fermeture du diaphragme oblige d'utiliser une source lumineuse pour réduire les temps de pose. En utilisant le spot de 300 W, on obtient des temps de pose raisonnables de l'ordre de 100 à 200 ms, qui permettent d'utiliser la fréquence d'images que l'on s'est fixée (*i.e* une image par seconde). L'expérience montre cependant que cette fréquence est trop élevée.

Pour laisser le temps à l'ordinateur d'écrire les données sur le disque, la fréquence d'acquisition est diminuée à une image toutes les deux secondes.

Les éprouvettes testées sont des bandes rectangulaires de mousses de 20 à 40 mm de large, qui comportent ou non un trou en leur centre. Le système d'acquisition d'images et la machine de traction sont totalement indépendants. Les essais mécaniques sont pilotés en vitesse de déplacement traverse. La vitesse de la traverse est fixée par le nombre d'images souhaité pour décrire l'essai mécanique. En effet, en se fixant, par exemple, l'étude de 30 stades de déformations (30 images), l'essai dure 1 minute avec la fréquence d'acquisition que l'on a choisie. De plus, connaissant la déformation macroscopique finale de l'échantillon et sa longueur de jauge initiale, on peut en déduire l'allongement atteint à la fin de l'essai. On est ainsi capable de régler la vitesse traverse. Il est important de noter que le choix du nombre total d'images prises (s'il correspond au nombre d'images sur lesquelles la corrélation d'images est réalisée) doit être réfléchi pour un dépouillement en mode incrémental. En effet, plus le nombre d'images dépouillées est grand, plus l'erreur augmente (voir section b) de l'Annexe F, page 254)

Le but de la corrélation d'images consiste à établir les déplacements d'un nombre fini de points. Dans notre cas, ces points sont positionnés sur une grille virtuelle à maille rectangulaire. Chaque point de la grille se voit associer les niveaux de gris de son voisinage. La méthode de corrélation d'images numériques compare alors les niveaux de gris du voisinage du point avec ceux pris dans une autre image. La position où les niveaux de gris coïncident le mieux est repérée. Le déplacement du point correspond à la distance entre ce maximum de vraisemblance et la position initiale du point. Une fois le champ de déplacement déterminé, les tenseurs des déformations de Green-Lagrange sont calculées. La valeur de la déformation en un point de la grille est déterminée par approximation sur l'ensemble des gradients de déplacement des points situés autour du point de la grille. Pour plus de précision sur la méthode suivie, on peut se reporter en Annexe F.

### V.2.2 Champs de déformation d'une éprouvette rectangulaire de mousse

#### a) Hétérogénéités de déformations

Les champs de déformation axiale obtenus au cours d'un essai de traction suivant la direction transverse TD pour une mousse MN 110-050-16 sont représentés sur la figure V.8. Sur cette figure, on peut voir que la mousse présente des hétérogénéités de déformations. Ces hétérogénéités apparaissent dès le début de l'essai et augmentent légèrement avec la déformation globale. Les déformations locales fluctuent de $\pm$ 1 % lorsque la déformation moyenne est de 2 % (voir figure V.8a). Pour une déformation moyenne de 12 %, les déformations locales sont égales à 12 % $\pm$ 3 % (voir figure V.8b). Ces hétérogénéités forment des bandes. Cependant, ces bandes ne ressemblent pas à des bandes de localisation de la déformation comme celles observées en compression (Bastawros et al., 2000; Wang et Cuitiño, 2002). En effet, l'ensemble de l'éprouvette continue à se déformer et la rupture ne s'amorce pas forcément dans une bande. La largeur des bandes et leur espacement sont de 4 à 5 cellules pour 12 % de déformation globale (voir figure V.8). L'angle des bandes avec la direction de sollicitation est d'environ 53°. Pour les déformations transverses, les mêmes hétérogénéités de déformation sont observées.

De même, pour les déformations axiales et transverses lors d'un essai de traction suivant la direction de défilement RD, les mêmes phénomènes d'hétérogénéité sont observés (voir figure V.9).

Ces hétérogénéités de déformation des mousses ont déjà été observées par Badiche (Badiche et al., 1999). Comme dans notre cas, elles sont présentes dès le début et tout au long de l'essai. Cependant, les hétérogénéités ne semblent pas formées de bandes et leur amplitude reste constante, de l'ordre de $\pm$ 1 % tout au long de l'essai. Mais, Badiche a étudié des zones très restreintes ($18 \times 18$ mm$^2$) pour les mousses qui nous concernent ou de grandes zones sur des mousses différentes dont on ignore la zone de prélèvement

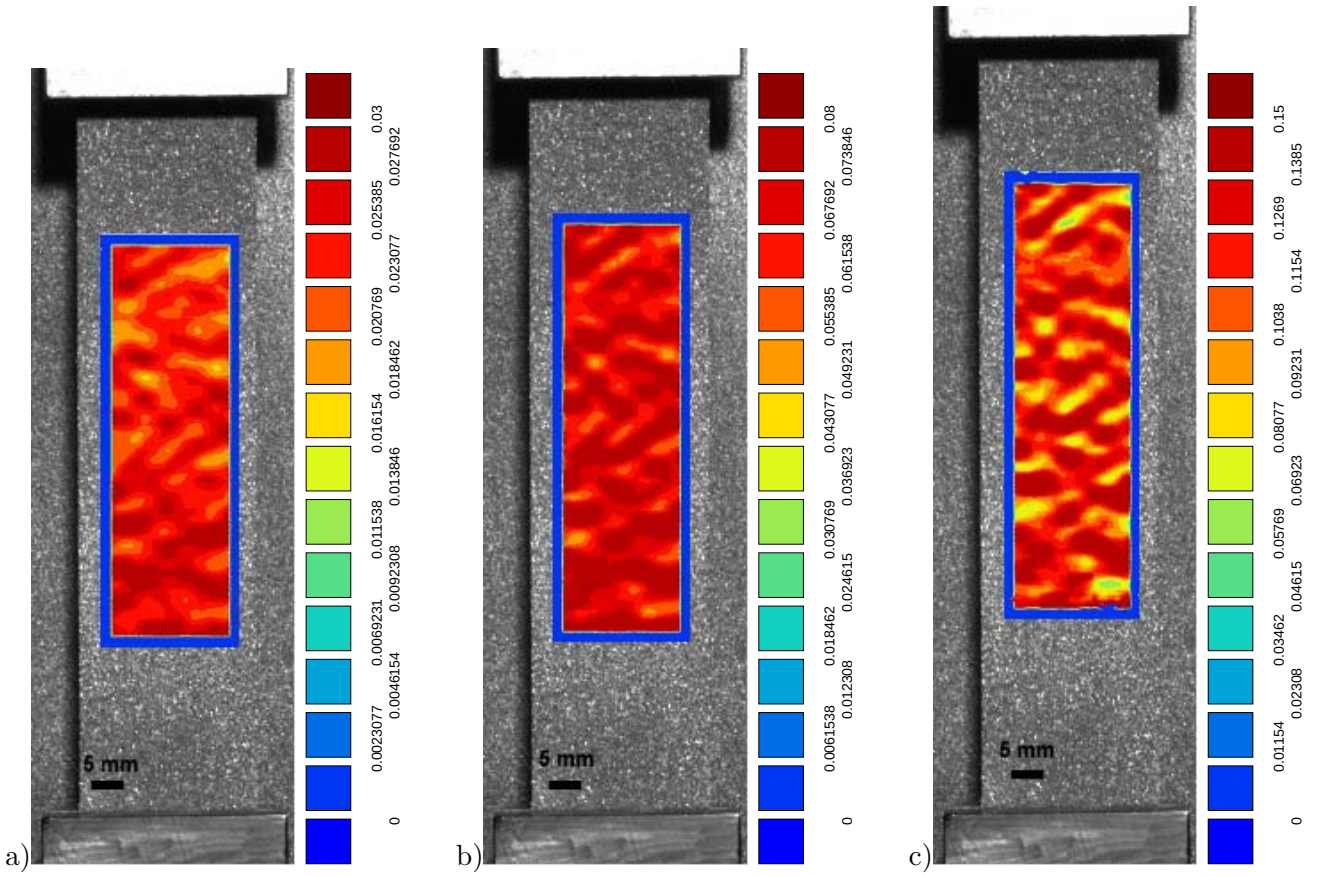



**Figure V.8** : Champ de déformations axiales ($G_s = 1$, $N_s = 5$) – traction suivant la direction TD – mousse MN 110-050-16 : a) 2 % de déformation globale, b) 6 % de déformation globale, c) 12 % de déformation globale.

(MN 60-055-25 et MN 45-055-25). Il est donc difficile de comparer ces résultats avec ceux obtenus dans cette thèse.

En conclusion de cette section, on peut dire que l'origine des ces hétérogénéités de déformation n'a pas été identifiée. Toutefois, compte tenu des tests de validation de la mesure qui ont été réalisés (voir Annexe F), ces hétérogénéités ne semblent pas provenir d'un artefact de mesure lié à la rugosité de la structure cellulaire de la mousse. De plus, elles ne proviennent pas de la méthode de corrélation car, avec les paramètres de dépouillement choisis, la précision sur les champs de déformation est de 0,4 % (voir Annexe F). En outre, si l'on compare les champs de déformation des mousses (voir figures V.8, V.9) et celui de l'éprouvette d'une tôle d'acier (voir figure F.8) pour une même déformation globale, on ne retrouve pas de bandes ni d'hétérogénéités aussi marquées pour la tôle d'acier. Un début d'explication peut venir de l'épaisseur de la mousse. En effet, le bloc de polyuréthanne est découpé en un rouleau d'épaisseur 1,6 mm. Trois cellules sont donc contenues en moyenne dans l'épaisseur de la mousse. En supposant que les bulles font toutes 500 $\mu$m de diamètre et que l'épaisseur de la mousse est rigoureusement de 1,5 mm, deux situations sont alors possibles lors de la découpe :

- 3 cellules complètes sont présentes dans l'épaisseur ;
- 2 cellules complètes et 2 demi-cellules sont présentes dans l'épaisseur.

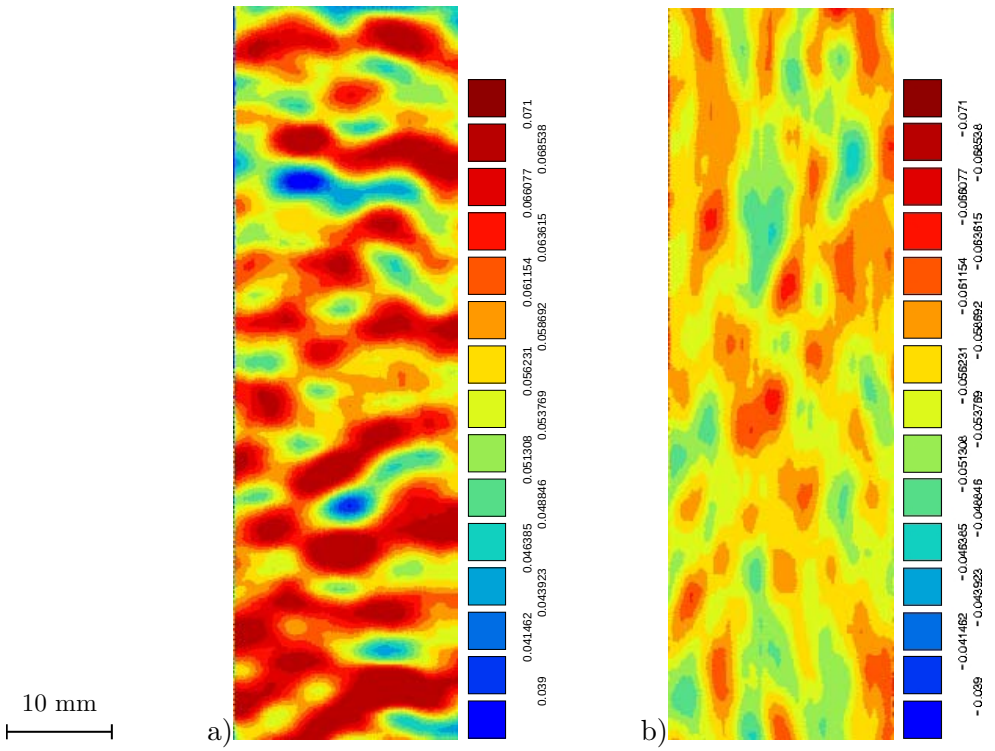



**Figure V.9** : Champ de déformations ($G_s = 1$, $N_s = 5$) – traction suivant la direction RD – mousse MN 110-050-16 : a) déformations axiales (6 % de déformation globale), b) déformations transverses (-3 % de déformation globale).

Compte tenu de la faible épaisseur de la mousse, ces deux situations ne sont pas équivalentes au niveau des déformations. En effet, on a vu, en tomographie aux rayons X (voir section I.5.4), que l'effet des brins "libres" est important dans le cadre de l'endommagement des mousses. 3 cellules complètes ont plus de difficultés à se déformer. L'alternance de ces deux situations peut donc conduire à des bandes d'hétérogénéités de la déformation. La périodicité des bandes viendrait alors du procédé de bullage et de découpe. Une analyse de corrélation 3D des essais in-situ de tomographie aux rayons X permettra, dans le futur, de trancher sur l'existence et l'origine des hétérogénéités de déformation.

Enfin, on peut aussi remarquer que le même genre de phénomène de localisation a été observé dans le cas de matériaux hétérogènes massifs. Au cours de l'étude d'une tôle laminée de zirconium polycristallin sous traction uniaxiale, Doumalin et al. observent des bandes pour des directions centrées autour de $\pm$ 52° par rapport à la direction de sollicitation (Doumalin et al., 2003). Ces bandes interagissent à plus grande portée à une distance cinq fois supérieure à la taille moyenne des grains. Dans le cas de la mousse, les cellules jouent le rôle des grains du zirconium. Dans les deux études, le motif révélé par les bandes de localisation traduit la manière dont les mécanismes de déformation apparaissent dans le matériau et met en évidence des directions privilégiées pour lesquelles les phénomènes agissent à plus longue distance.

### b) Coefficient d'expansion latérale plastique

A partir des champs de déformation bidimensionnels de la mousse, le coefficient d'expansion latérale plastique $\nu_{12}^p$ est déduit pour tous les essais de traction. Pour cela, la moyenne des déformations axiales $\overline{\varepsilon_{11}}$ et transversales $\overline{\varepsilon_{22}}$ de tous les points de la grille est réalisée pour chaque cartographie. Puis, ces déformations sont tracées dans le repère ($\overline{\varepsilon_{11}}$, $\overline{\varepsilon_{22}}$) et le coefficient d'expansion latérale plastique,

correspondant à l'essai, est déterminé. Ces valeurs sont reportées dans le tableau V.2. Les valeurs des coefficients d'expansion latérale plastique, déterminées par corrélation d'images, sont légèrement plus faibles que celles trouvées par extensométrie "classique" (voir tableau V.1). Mais, l'ordre de grandeur est quand même respecté.

| | Direction RD | Direction TD |
|---|---|---|
| Type de mousse | $\nu_{12}^p$ | $\nu_{12}^p$ |
| MN 110-042-16 | 0,42 ± 0,03 | 0,16 ± 0,02 |
| MN 110-050-16 | 0,48 ± 0,04 | 0,17 ± 0,02 |

**Tableau V.2** : Valeurs des coefficients d'expansion latérale plastique déterminés à partir des essais photomécaniques.

*Remarque : les valeurs des coefficients d'expansion latérale déterminées par corrélation d'images par Badiche sont plus élevées (Badiche et al., 1999). Elles varient entre 0,5 et 0,74 pour la direction RD, et entre 0,22 et 0,25 pour la direction TD. Cependant, ces mesures sont effectuées sur de petites zones ($18 \times 18$ $mm^2$) et concernent toutes les zones des mousses MN 110-050-16 et MN 110-050-20 (zones Nord, Sud, Est et Ouest).*

### V.2.3 Champs de déformation autour d'un trou "macroscopique"

Les champs de déformation autour d'un trou "macroscopique" sont étudiés pour la mousse MN 110-050-16. Plusieurs trous de différentes tailles sont réalisés à l'emporte pièce ou par électroérosion, dans des éprouvettes rectangulaires de mousse de nickel. Les trous ont des dimensions de 1, 2, et 4 mm de rayon alors que les largeurs des éprouvettes varient entre 20 et 40 mm.

Les champs de déformation axiale relatifs aux éprouvettes contenant les trous de 1 et 2 mm de rayon sont donnés sur la figure V.10. Pour les trous de 2 et 4 mm de rayon, une localisation importante de la déformation peut être observée autour du trou. Cependant, pour le trou de 1 mm de rayon, les déformations axiales apparaissent plus réparties sur la surface utile de l'éprouvette. Les variations de la déformation correspondent davantage à un essai de comportement effectué à la section a) (page 153). Ces propos sont confirmés de manière quantitative par les profils de déformation axiale obtenus le long de la section minimale de l'éprouvette (voir figure V.11). Pour un trou de 2 mm de rayon, le profil présente une concentration de déformation aux abords du trou, tandis qu'il reste relativement plat dans toute l'éprouvette pour un trou de plus petite taille. Tout se passe comme si le trou de 1 mm de rayon n'avait aucune influence sur le comportement de la mousse. Cet effet de taille n'est pas surprenant dans les matériaux poreux ; le seuil critique à l'apparition de ce phénomène étant évidemment la taille des cellules. Si la taille du trou est inférieure à la taille des cellules, le trou demeure inexistant pour le matériau cellulaire. Cependant, les expériences montrent que le diamètre d'un trou "macroscopique" influence significativement le comportement mécanique des mousses de nickel lorsque celui-ci devient supérieur à quatre fois la taille des cellules.

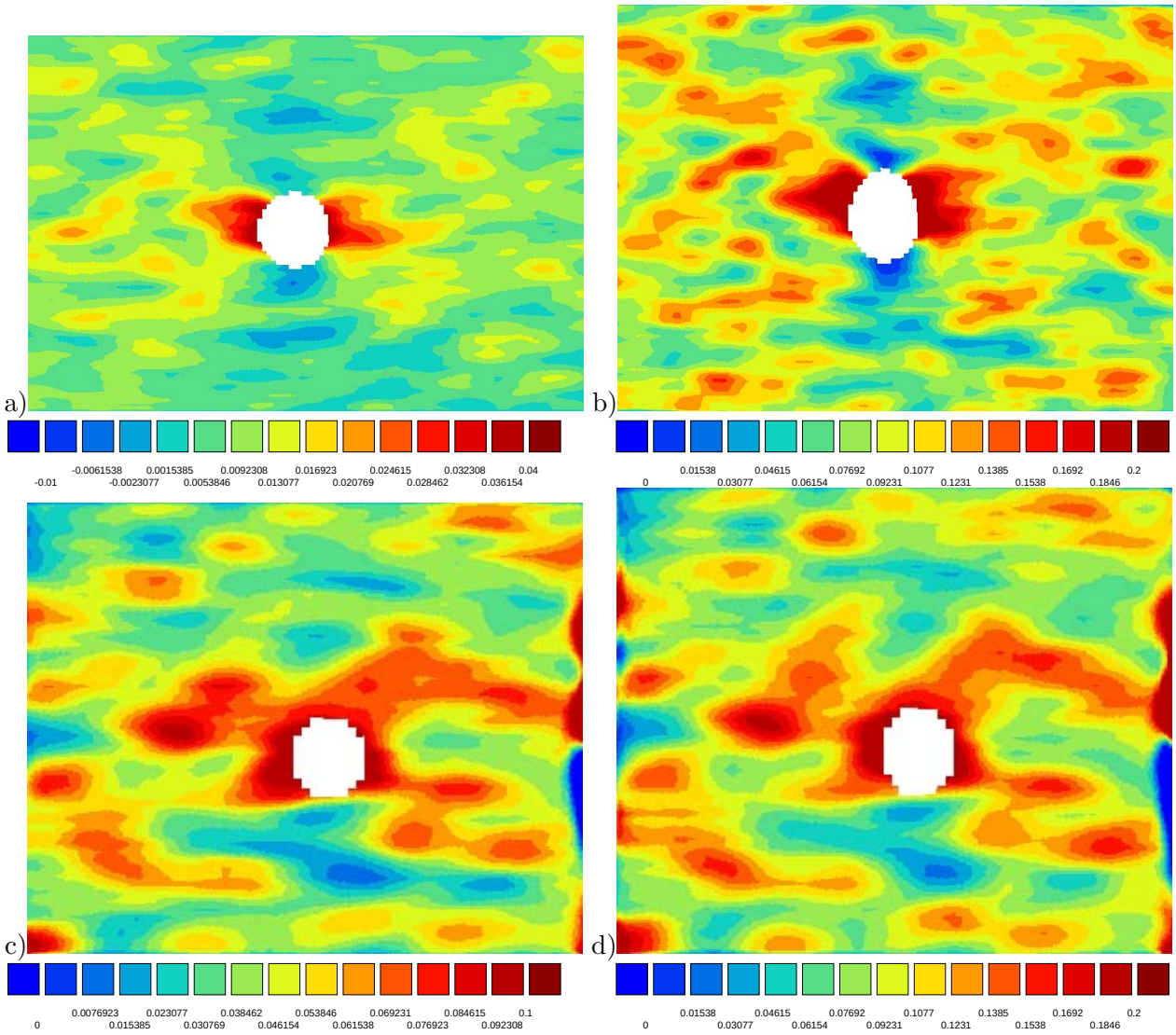



**Figure V.10** : Champs des déformations axiales : a) et b) trou de 2 mm de rayon (éprouvette de 40 mm de largeur), c) et d) trou de 1 mm de rayon (éprouvette 20 mm de largeur).

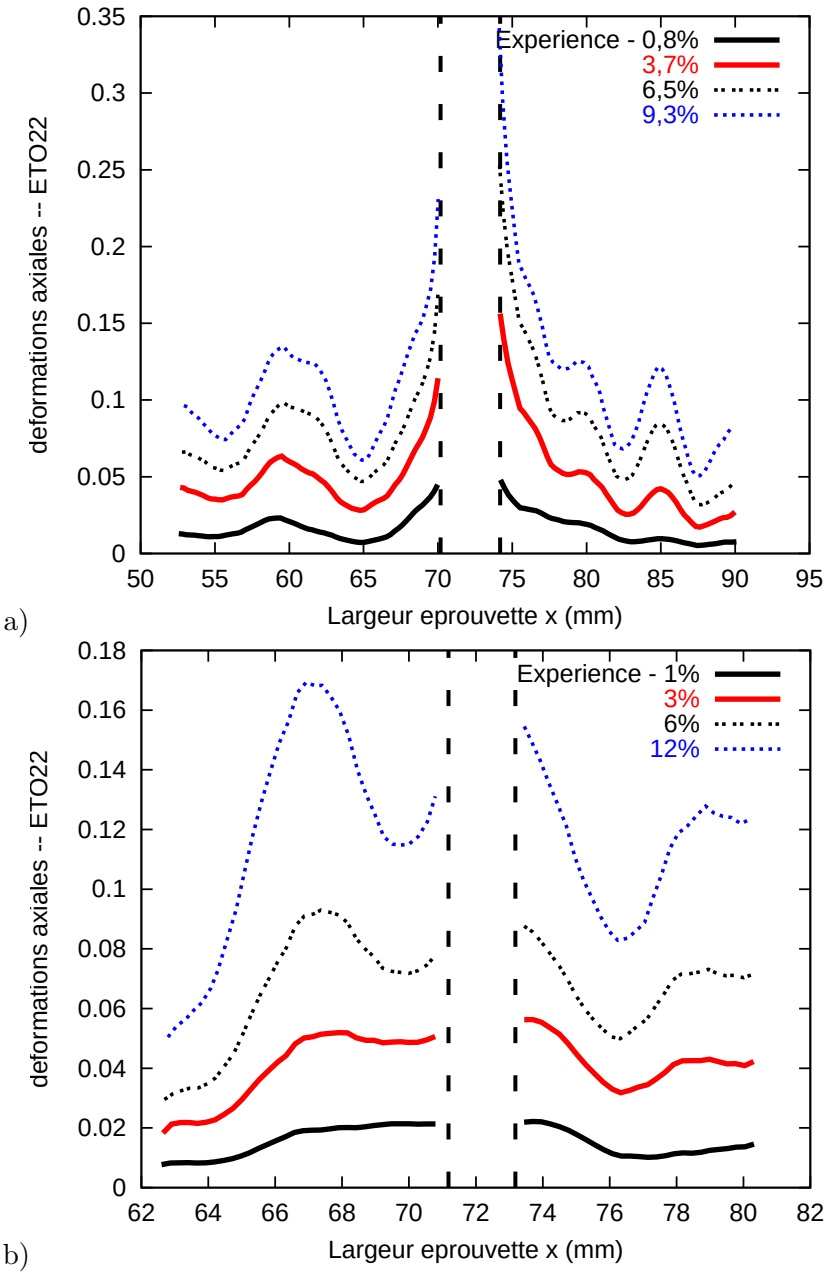



**Figure V.11** : Profils de déformations le long de la section minimale de l'éprouvette : a) trou de 2 mm de rayon (éprouvette de 40 mm de largeur), b) trou de 1 mm de rayon (éprouvette de 20 mm de largeur).

# Chapitre VI

# Modélisation du comportement multiaxial des mousses de nickel à cellules ouvertes

**Sommaire**


**VI.1 Modèle élastoplastique continu compressible anisotrope . . . . . 159**
VI.1.1 Présentation du modèle . . . . . 159
VI.1.2 Identification des paramètres du modèle . . . . . 161
VI.1.3 Application au problème du trou "macroscopique" dans une mousse . . . . . 162
**VI.2 Présentation d'un modèle de milieu micromorphe élastoplastique compressible 165**
VI.2.1 Motivations . . . . . 165
VI.2.2 Degrés de liberté et équations de bilan . . . . . 165
VI.2.3 Lois de comportement . . . . . 167
VI.2.4 Mise en évidence d'une longueur interne . . . . . 168
**VI.3 Problème d'un trou dans un milieu micromorphe . . . . . 170**
VI.3.1 Effet d'échelle dans le cas d'un milieu micromorphe élastique . . . . . 170
VI.3.2 Identification de la longueur caractéristique dans le cas d'une mousse de nickel . 170
**VI.4 Application à la rupture des mousses de nickel . . . . . 175**
VI.4.1 Identification d'un modèle simplifié d'endommagement dans le cas d'une bande de mousse en traction . . . . . 175
VI.4.2 Prédiction de la déchirure d'une mousse présentant une fissure horizontale . . . 177
**VI.5 Synthèse des principaux résultats de la troisième partie . . . . . 182**


## VI.1 Modèle élastoplastique continu compressible anisotrope

### VI.1.1 Présentation du modèle

Pour construire un modèle de plasticité, trois lois sont nécessaires : la fonction de charge $f$, la fonction d'écoulement $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p$ et la fonction d'écrouissage du matériau $\sigma_y$. La fonction de charge $f$ délimite, dans l'espace des contraintes et des variables d'écrouissage, le domaine d'élasticité. Les variables d'écrouissage

correspondent à toutes les variables qui interviennent dans chacun des mécanismes responsables du comportement inélastique du matériau. Elles caractérisent, à un instant donné, l'état du matériau ainsi que l'influence de son histoire. La fonction d'écoulement permet de définir la vitesse de déformation plastique hors du domaine d'élasticité. Enfin, la fonction d'écrouissage décrit l'évolution des variables d'écrouissage au cours de la déformation inélastique.

A partir des observations faites au paragraphe V.1, le type de loi utilisée dans la simulation du comportement mécanique doit rendre compte de l'anisotropie de la déformation des mousses, et de leur compressibilité. En effet, même si le nickel est plastiquement incompressible, la mousse est un matériau compressible. Un critère qualifié d'elliptique est donc choisi. Il fait intervenir le premier et le second invariant des contraintes, et est de la forme :

$$f(\underset{\sim}{\sigma}, \sigma_y) = \sigma_{eq} - \sigma_y \tag{VI.1}$$

avec

$$\boxed{\sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2}\, C\, \underset{\sim}{\sigma}^{\mathrm{dev}} : \underset{\sim}{\mathbf{H}} : \underset{\sim}{\sigma}^{\mathrm{dev}} + F\, (\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\sigma})^2 \right)^{1/2}}$$

- $\underset{\sim}{\sigma}^{\mathrm{dev}}$ représente le déviateur des contraintes
- $\underset{\sim}{\mathbf{H}}$ le tenseur de Hill $\begin{pmatrix} H_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_f \end{pmatrix}$
- $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ la matrice diagonale $\begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}$
- $C$ et $F$ deux constantes qui dépendent du matériau

*Remarque : un tel critère a déjà été utilisé pour les mousses par (Chastel et al., 1999; Badiche et al., 2000; Deshpande et Fleck, 2000b). Lorsque* $\underset{\sim}{\mathbf{H}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}}$, $C = 1$ *et* $F = 0$, *on retrouve la contrainte équivalente de von Mises.*

L'anisotropie du comportement de la mousse est marquée par la présence du tenseur de Hill $\underset{\sim}{\mathbf{H}}$ et la compressibilité du matériau est comprise dans le terme $F\, (\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\sigma})^2$.

Dans cette thèse, le principe du travail maximal est supposé applicable au cas des mousses. Le critère de plasticité est donc choisi comme potentiel plastique.
Soit $\underset{\sim}{\mathbf{N}}$ la direction d'écoulement, définie par la normale à la surface de charge.

$$\boxed{\underset{\sim}{\mathbf{N}} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}} \tag{VI.2}$$

Le matériau obéit à la règle de normalité suivante :

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{p}\,\underset{\sim}{\mathbf{N}} \tag{VI.3}$$

où $\dot{p}$ est le multiplicateur plastique.

*Remarque : $p$ est une norme du tenseur de vitesse de déformation plastique. $\dot{p}$ est défini tel que :*

$$\underset{\sim}{\sigma} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \sigma_{eq}\ \dot{p} \tag{VI.4}$$

*Sous chargement uniaxial et dans le cas isotrope, $\dot{p} = |\dot{\varepsilon}^p|$.*
*Dans le cas où $\underset{\sim}{\mathbf{H}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}}$ et $\underset{\sim}{\mathbf{P}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}}$, on peut exprimer facilement $\dot{p}$.*

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3C}\dot{\varepsilon}^{p\,dev} : \dot{\varepsilon}^{p\,dev} + \frac{1}{9F}Tr(\dot{\varepsilon}^p)^2} \tag{VI.5}$$

*Dans le cas anisotrope, l'expression, très lourde, n'est pas donnée ici.*

La loi d'écrouissage choisie pour le cas des mousses est une loi d'écrouissage isotrope doublement non linéaire donnant l'évolution de la contrainte d'écoulement en fonction du taux de déformation plastique cumulée $p$ :

$$\boxed{\sigma_y = \sigma_0 + Q_1(1 - \exp(-b_1 p)) + Q_2(1 - \exp(-b_2 p))} \tag{VI.6}$$

A partir de ces trois lois, on doit identifier 16 paramètres : les 6 composantes du tenseur de Hill, les 3 composantes de la matrice $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$, les 2 constantes $C$ et $F$, ainsi que les 5 coefficients de la loi d'écrouissage ($\sigma_0$, $Q_1$, $b_1$, $Q_2$, $b_2$).

### VI.1.2 Identification des paramètres du modèle

Pour identifier les 16 coefficients du modèle, on se sert des courbes de traction expérimentales, obtenues lors d'une sollicitation dans la direction RD, TD, 45° de la mousse mais aussi de l'information résultant des contractions latérales. L'identification se fait par méthode inverse grâce au module optimiseur de ZeBuLoN. Le principe est itératif. Les essais, qui composent la base expérimentale, sont simulés à partir d'un jeu de coefficients donné. Puis, les valeurs des paramètres à identifier sont modifiées de manière à minimiser la fonction coût. La fonction coût estime l'écart existant entre les courbes simulées et expérimentales. La modification des paramètres est réalisée grâce à un algorithme, dénommé "sqp" (Sequential Quadratic Programming ou Projected Lagrangian Method). Les valeurs des paramètres optimisées correspondent à celles qui minimisent la fonction coût.

*Remarque : pour mémoire, la direction 45° correspond à la direction formant un angle de 45° avec l'axe RD dans le plan (RD, TD). Les essais à 45° permettent d'identifier le paramètre de cisaillement $H_d$.*

La valeur des 16 coefficients identifiés est donnée dans le tableau VI.1. Les paramètres $H_e$, $H_f$ ne peuvent pas être identifiés à partir de notre base expérimentale. En effet, aucun essai de cisaillement, mettant en jeu la direction normale de la mousse, n'a été réalisé. Car, compte tenu de la faible épaisseur de la mousse dans cette direction, ces essais ne sont pas simples à mettre en place. Les coefficients $H_e$ et $H_f$ sont donc arbitrairement pris égaux à 1. De plus, les valeurs des paramètres $C$ et $P$ sont forcées à 1. Cela revient à considérer que les valeurs de $F$, $Q$ et $R$ trouvées lors de l'identification correspondent respectivement aux valeurs de $F/C$, $Q/P$ et $R/P$. Seuls ces rapports interviennent réellement dans le critère.

A partir du tableau VI.1, on observe que les coefficients $Q$ et $R$ trouvés sont du même ordre de grandeur. Ces deux coefficients font partis de la matrice $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ et décrivent l'anisotropie de la compressibilité de la mousse. Ceci est en accord avec les résultats de la section V.1. En effet, lorsque la mousse est sollicitée en traction dans une direction, elle se comprime de la même quantité dans les deux autres directions. Ce n'est pas le cas en traction suivant la direction transverse TD.

| $C$ | $F$ | $P$ | $Q$ | $R$ | $H_a$ | $H_b$ | $H_c$ | $H_d$ | $H_e$ | $H_f$ | $\sigma_0$ MPa | $Q_1$ MPa | $b_1$ | $Q_2$ MPa | $b_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,000682 | 1 | 36,6 | 22,6 | 0,41 | 1,8 | 1,75 | 1,49 | 1 | 1 | 0,3 | 0,51 | 611 | 7442 | 0,0013 |

**Tableau VI.1** : Coefficients du modèle élastoplastique anisotrope compressible.

On peut aussi remarquer que le jeu de coefficients identifiés donne bien les mêmes valeurs des coefficients d'expansion latérale plastiques que ceux trouvés à la section V.1. En effet, à partir des formules de l'Annexe G, on obtient pour les coefficients d'expansion du modèle continu :

$$\text{sens RD} \begin{cases} \nu_{12}^p = 0,49 \\ \nu_{13}^p = 0,47 \end{cases} \qquad \text{sens TD} \begin{cases} \nu_{12}^p = 0,17 \\ \nu_{13}^p = 0,22 \end{cases} \tag{VI.7}$$

Sur la figure VI.1, le modèle élastoplastique anisotrope compressible est tracé avec le jeu de coefficients du tableau VI.1. Il est confronté aux courbes expérimentales pour une sollicitation suivant la direction RD et TD. On peut constater, sur la figure VI.1, que le modèle élastoplastique anisotrope compressible est capable de retranscrire l'anisotropie des mousses de nickel.

### VI.1.3 Application au problème du trou "macroscopique" dans une mousse

Le modèle identifié est appliqué à la description du comportement de la mousse autour d'un trou. Sur la figure VI.2b, on peut voir le résultat de la simulation d'un trou de 2 mm de rayon. Qualitativement, on observe un bon accord entre les champs des déformations expérimental et simulé. Décrire le comportement de la mousse par un modèle continu est donc possible. Toutefois, le modèle continu ne permet pas de rendre compte des fluctuations de la déformation.

Si l'on s'intéresse, de manière plus quantitative, au profil des déformations le long de la section minimale, on observe que l'expérience et le modèle donne la même déformation moyenne (voir figure VI.3). Les déformations expérimentales oscillent de part et d'autre de la courbe simulée. Cependant, pour l'ensemble des profils étudiés, le niveau des déformations expérimentales aux abords du trou est plus faible que celui prédit par la simulation. Cela résulte de la méthode de calcul de la déformation par le logiciel de corrélation. En effet, pour calculer la déformation, la connaissance des vecteurs déplacements de tous les points du pavé d'approximation est nécessaire. Les déformations des points de la grille situés au bord des trous ne peuvent donc pas être calculées.

*Remarque : le modèle continu "classique" n'est évidemment pas capable de rendre compte des effets de la taille du trou dans les milieux poreux (voir figure VI.3d). Quel que soit le rayon du trou dans une plaque infinie, les concentrations de contraintes sont identiques. Pour tenir compte de cet effet d'échelle observé expérimentalement, le modèle "classique" est étendu vers un modèle de la mécanique des milieux continus généralisés. Cette extension constitue l'objet du chapitre suivant.*

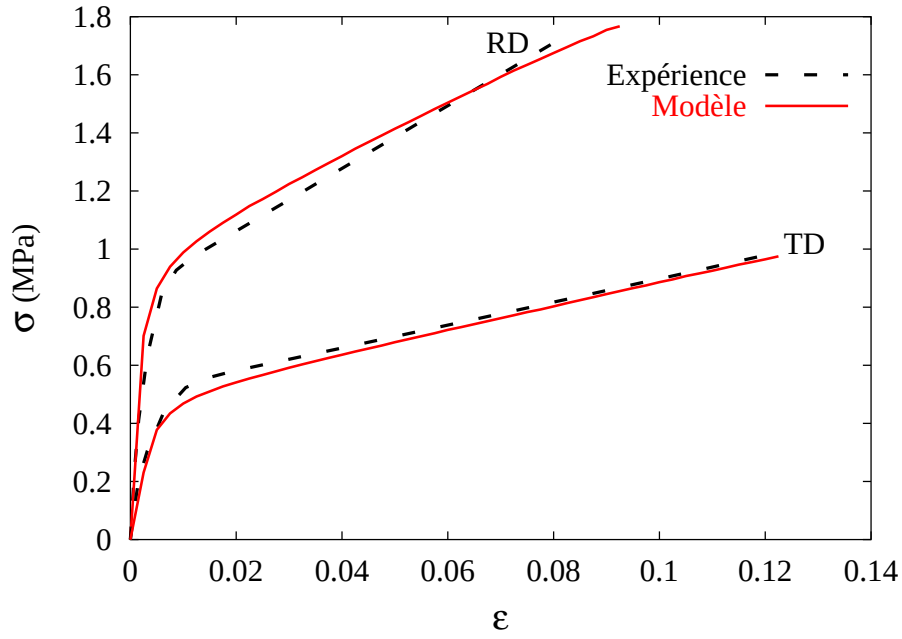



**Figure VI.1** : Simulation du comportement mécanique des mousses – modèle élastoplastique anisotrope compressible.

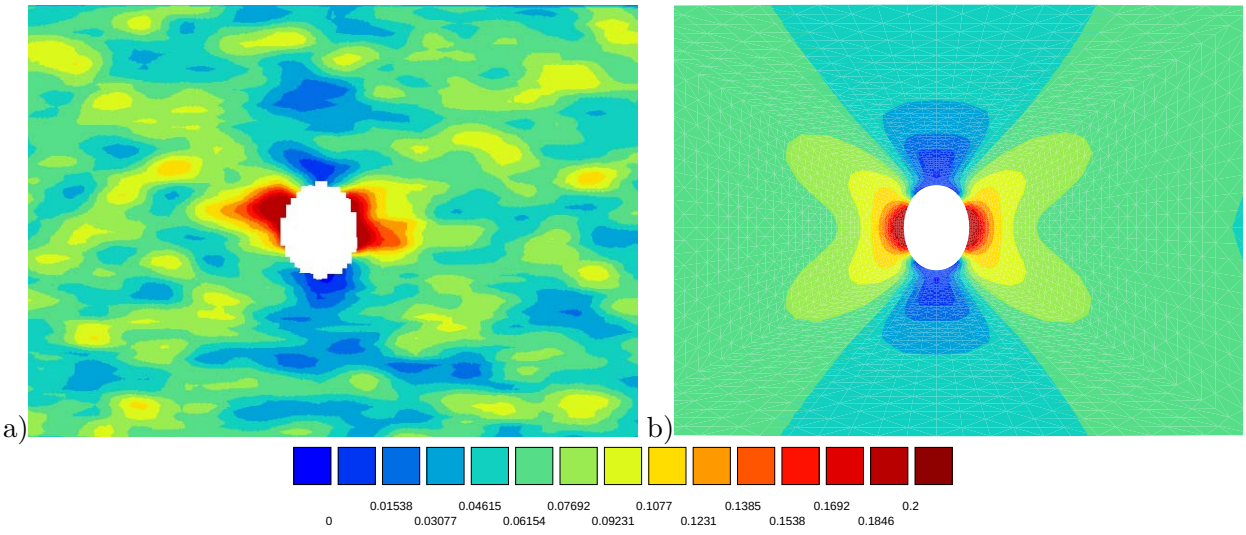



**Figure VI.2** : Confrontation des champs de déformation axiales autour d'un trou de 2 mm de rayon (éprouvette de 40 mm de largeur) : a) expérience, b) simulation.

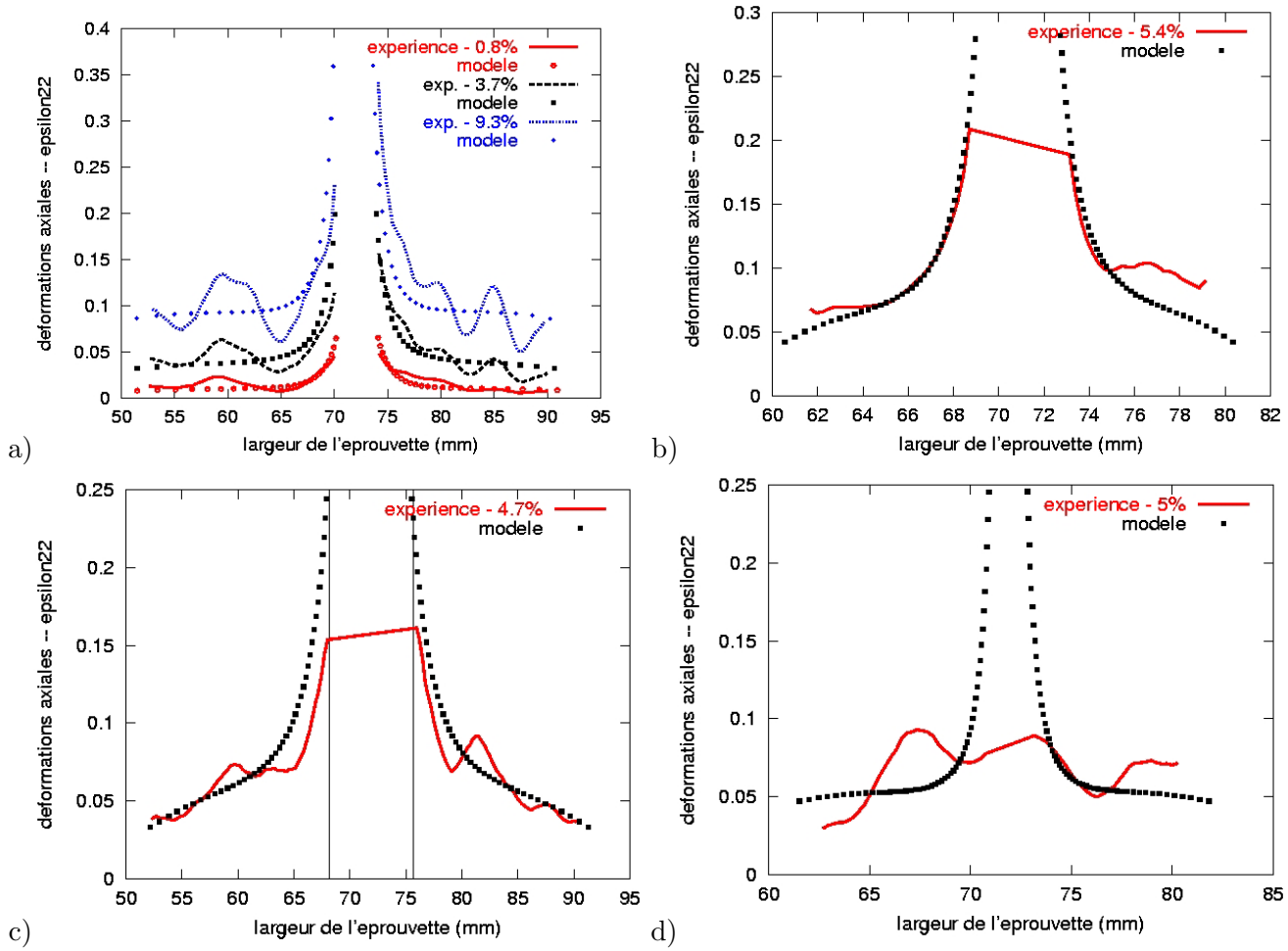



**Figure VI.3** : Profil des déformations le long de la section minimale : a) trou de rayon 2 mm (éprouvette de 40 mm de largeur), b) trou de rayon 2 mm (éprouvette de 20 mm de largeur), c) trou de rayon 4 mm (éprouvette de 40 mm de largeur), d) trou de rayon 1 mm (éprouvette de 20 mm de largeur).

## VI.2 Présentation d'un modèle de milieu micromorphe élastoplastique compressible

### VI.2.1 Motivations

Dans le but de rendre compte des effets d'échelle observés précédemment dans le comportement mécanique des mousses de nickel, nous avons choisi de nous tourner vers la mécanique des milieux continus généralisés qui incorpore naturellement des longueurs caractéristiques dans la modélisation. Cette classe de modèles est largement utilisée aujourd'hui pour la simulation des phénomènes de localisation dans les matériaux élastoplastiques ou endommageables (Borst et al., 1993; Peerlings et al., 2001). L'objectif est alors essentiellement d'obtenir des résultats de simulations par éléments finis qui ne dépendent pas du maillage, contrairement à l'approche classique sujette à ces artefacts. Il est possible dans de nombreux cas de relier les longueurs caractéristiques de ces modèles avec certains éléments de la microstructure (taille des hétérogénéités...). Dans ce type d'approches, on ajoute des degrés de liberté supplémentaires dans la cinématique du milieu, ou bien des gradients d'ordre supérieur dans la modélisation (Forest et Sievert, 2003). Dans le cas d'une théorie de Cosserat, des degrés de liberté de rotation supplémentaires indépendants de la rotation matérielle du milieu sont introduits. Pour l'application aux mousses de nickel, cette théorie se révèle insuffisante, ce qui est démontré au paragraphe VI.3. C'est pourquoi, c'est le modèle micromorphe, plus riche, qui est retenu dans ce travail. Dans ce chapitre, la cinématique et la statique du milieu micromorphe sont présentées, ainsi qu'une extension aux modèles de plasticité compressible.

L'approche micromorphe a déjà été utilisée dans le cas des mousses d'aluminium afin de simuler la formation de bandes de localisation horizontales lors d'un essai de compression (Blazy, 2003). Elle est étendue ici au cadre anisotrope exigé par le comportement des mousses de nickel. La formulation du modèle micromorphe élastoplastique compressible anisotrope, présentée dans ce travail, est appelée *microfoam* dans la suite.

Les paramètres supplémentaires du modèle sont identifiés grâce aux mesures de champs autour d'un trou "macroscopique" dans une mousse (voir section V.2.3). Le modèle doit décrire l'effet d'échelle observé, contrairement à l'approche classique initiale. L'utilisation des mesures de champs de déformation pour l'identification des paramètres d'un milieu non local a déjà été proposée dans le cas d'éprouvettes CT en matériaux composites (Geers et al., 1998). Elle permet de déceler les tailles caractéristiques des zones endommagées indispensables à l'identification des paramètres-clefs de ces modèles.

On cherche aussi à décrire les essais de fissuration dans les mousses, effectués au cours de cette thèse. Le fil conducteur est alors l'économie de moyens. On essaie de limiter au maximum le nombre de paramètres supplémentaires. C'est pourquoi on s'en tient ici à un modèle d'endommagement très simple, qui n'a pas l'ambition de décrire tout à fait fidèlement la rupture du matériau. L'objectif est avant tout de garantir une bonne estimation de la ductilité de la mousse en présence de fissures.

### VI.2.2 Degrés de liberté et équations de bilan

Dans un milieu micromorphe, chaque point matériel possède des degrés de liberté de déplacement $\underline{\mathbf{u}}$ et de microdéformation $\underset{\sim}{\chi}$ indépendants. Le champ $\underset{\sim}{\chi}$ représente la rotation et la déformation d'un trièdre directeur sous-jacent et n'est donc, en général, pas compatible. Dans le cas tridimensionnel, cela fait au total 3+9 degrés de liberté en chaque point.
Dans le cas des déformations et contraintes planes, on retient les degrés de liberté :

$$u_1, u_2, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}, \chi_{21} \tag{VI.8}$$

Les mesures de déformations associées sont construites à l'aide du premier gradient des grandeurs précédentes : le tenseur de déformation classique $\underset{\sim}{\varepsilon}$, la déformation relative $\underset{\sim}{\mathbf{e}}$ et le gradient de microdéformation $\underset{\approx}{\mathbf{K}}$ :

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = (\underline{\mathbf{u}} \otimes \boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{\nabla} \otimes \underline{\mathbf{u}})/2, \quad \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \tag{VI.9}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{u}} \otimes \boldsymbol{\nabla} - \underset{\sim}{\chi}, \quad e_{ij} = u_{i,j} - \chi_{ij} \tag{VI.10}$$

$$\underset{\approx}{\mathbf{K}} = \underset{\sim}{\chi} \otimes \boldsymbol{\nabla}, \quad K_{ijk} = \chi_{ij,k} \tag{VI.11}$$

où les $(\underline{\mathbf{e}}_i)$ désignent une base cartésienne orthonormée.

*Remarque : la virgule au niveau des indices désigne une dérivée partielle par rapport à la coordonnée indiquée.*

A chaque mesure de déformation est associé un tenseur de contrainte généralisé figurant dans la densité volumique de puissance des efforts intérieurs :

$$p^{(i)} = \underset{\sim}{\sigma} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} + \underset{\sim}{\mathbf{s}} : \dot{\underset{\sim}{\mathbf{e}}} + \underset{\approx}{\mathbf{M}} \vdots \dot{\underset{\approx}{\mathbf{K}}} \tag{VI.12}$$

*Remarque : le tenseur des contraintes $\underset{\sim}{\sigma}$ est symétrique, ce qui n'est, en général, pas le cas de $\underset{\sim}{\mathbf{s}}$. Le tenseur d'hypercontraintes $\underset{\approx}{\mathbf{M}}$ est d'ordre 3.*

Les contraintes généralisées doivent satisfaire les équations d'équilibre suivantes, à savoir la conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique :

$$(\underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{\mathbf{s}}).\boldsymbol{\nabla} = 0, \quad \sigma_{ij,j} + s_{ij,j} = 0 \tag{VI.13}$$

$$\underset{\approx}{\mathbf{M}}.\boldsymbol{\nabla} + \underset{\sim}{\mathbf{s}} = 0, \quad M_{ijk,k} + s_{ij} = 0 \tag{VI.14}$$

où tout effort de volume a été négligé par simplicité.
On remarque que le tenseur $\underset{\sim}{\mathbf{s}}$ réalise un couplage entre les deux équations d'équilibre.

Concernant les conditions aux limites, des composantes de $\underline{\mathbf{u}}$ ou/et de $\underset{\sim}{\chi}$ peuvent être imposées au bord où les efforts sont surfaciques :

$$\underline{\mathbf{t}} = (\underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{\mathbf{s}}).\underline{\mathbf{n}}, \quad t_i = (\sigma_{ij} + s_{ij})n_j \tag{VI.15}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{T}} = \underset{\approx}{\mathbf{M}}.\underline{\mathbf{n}}, \quad T_i = M_{ijk}n_k \tag{VI.16}$$

*Remarque : il est aussi possible d'imposer des conditions mixtes.*

La formulation variationnelle du problème nécessaire à sa discrétisation par la méthode des éléments finis est la suivante :

$$\int_V p^{(i)} \, dV = \int_{\partial V} \left( \underline{\mathbf{t}}.\dot{\underline{\mathbf{n}}} + \underset{\sim}{\mathbf{T}} : \dot{\underset{\sim}{\chi}} \right) \, dS \tag{VI.17}$$

La présentation complète de la discrétisation par éléments finis du modèle est réalisée dans la thèse de Blazy (Blazy, 2003). Des solutions analytiques en élasticité et en élastoplasticité sont aussi présentées. Elles permettent de valider le code. On se contente de signaler ici que les calculs présentés dans la suite sont réalisés avec des éléments bidimensionnels triangles et quadrangles à interpolation quadratiques pour $\underline{\mathbf{u}}$ et $\underset{\sim}{\chi}$ et intégration complète.

### VI.2.3 Lois de comportement

Chaque tenseur de déformation est décomposé en une partie élastique et plastique :

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon}^e + \underset{\sim}{\varepsilon}^p \tag{VI.18}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{e}} = \underset{\sim}{\mathbf{e}}^e + \underset{\sim}{\mathbf{e}}^p \tag{VI.19}$$

$$\underset{\approx}{\mathbf{K}} = \underset{\approx}{\mathbf{K}}^e + \underset{\approx}{\mathbf{K}}^p \tag{VI.20}$$

Les lois d'élasticité généralisée relient les tenseurs de contraintes aux différentes déformations élastiques. Par simplicité, aucun couplage n'est introduit, bien qu'un tel couplage soit possible :

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\approx}{\mathbf{c}} : \underset{\sim}{\varepsilon}^e \tag{VI.21}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{s}} = \underset{\approx}{\mathbf{a}} : \underset{\sim}{\mathbf{e}}^e \tag{VI.22}$$

$$\underset{\approx}{\mathbf{M}} = \underset{\approx\approx}{\mathbf{A}} \vdots \underset{\approx}{\mathbf{K}}^e \tag{VI.23}$$

Le tenseur $\underset{\approx}{\mathbf{c}}$ désigne le tenseur classique des modules d'élasticité, tandis que $\underset{\approx}{\mathbf{a}}$ et $\underset{\approx\approx}{\mathbf{A}}$ sont des modules supplémentaires.
Pour la dernière relation d'élasticité, la forme simplifiée, proposée par Shu et Fleck dans (Shu et Fleck, 1999), est choisie :

$$\underset{\approx}{\mathbf{M}} = l_c^2 \, \underset{\approx}{\mathbf{c}} : \underset{\approx}{\mathbf{K}}^e, \quad M_{ijk} = l_c^2 \, c_{ijpq} K^e_{pqk} \tag{VI.24}$$

Elle fait intervenir la longueur caractéristique $l_c$ comme seul paramètre supplémentaire.

*Remarque : la dimension de $M_{ijk}$ est MPa.mm et celle de $K_{ijk}$ est $m^{-1}$.*

Il reste à choisir le tenseur $\underset{\approx}{\mathbf{a}}$. Pour cela, on remarque que si $||\underset{\approx}{\mathbf{a}}||$ est très grand et si $\underset{\sim}{\mathbf{e}}^p = 0$, alors $\underset{\approx}{\mathbf{a}}$ joue le rôle d'une pénalité et maintient $\underset{\sim}{\mathbf{e}}$ proche de zéro. D'après l'équation (VI.10), cela signifie que $\underset{\sim}{\chi}$ s'identifie quasiment à $\underline{\mathbf{u}} \otimes \boldsymbol{\nabla}$.
Le cas particulier où $\underset{\sim}{\chi} = \underline{\mathbf{u}} \otimes \boldsymbol{\nabla}$ fait dégénérer le modèle micromorphe en une théorie du second gradient (Forest et Sievert, 2003). Nos calculs sont donc proches de ce cas limite mais ils gardent la souplesse des conditions aux limites du milieu micromorphe (VI.15) et (VI.16).

Concernant le comportement élastoplastique, on s'en tient à une seule fonction seuil dépendant a priori des trois tenseurs de contraintes :

$$f(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\mathbf{s}}, \underset{\approx}{\mathbf{M}}) = \sigma_{eq} - \sigma_y \tag{VI.25}$$

$$\sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2} C \underset{\sim}{\sigma}^{\mathrm{dev}} : \underset{\approx}{\mathbf{H}} : \underset{\sim}{\sigma}^{\mathrm{dev}} + F(\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\sigma})^2 + a_1 \underset{\sim}{\mathbf{s}}^{\mathrm{dev}} : \underset{\sim}{\mathbf{s}}^{\mathrm{dev}} + a_2 \underset{\sim}{\mathbf{s}}^{\mathrm{dev}} : \underset{\sim}{\mathbf{s}}^{\mathrm{devT}} + a_3 (\mathrm{Tr}\, \underset{\sim}{\mathbf{s}})^2 \right.$$

$$\left. + b_1 \underset{\approx}{\mathbf{M}} \vdots \underset{\approx}{\mathbf{M}} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{VI.26}$$

La règle de normalité devient dans ce cas :

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{p} \, \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}, \quad \dot{\underset{\sim}{\mathbf{e}}}^p = \dot{p} \, \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\mathbf{s}}}, \quad \dot{\underset{\approx}{\mathbf{K}}}^p = \dot{p} \, \frac{\partial f}{\partial \underset{\approx}{\mathbf{M}}} \tag{VI.27}$$

Dans ce travail, les simulations présentées sont réalisées dans le cas simplifié où

$$a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = 0$$

de sorte que $\underset{\sim}{\mathbf{e}}^p = 0, \underset{\approx}{\dot{\mathbf{K}}}^p = 0$. La relation linéaire entre le gradient de la microdéformation et le tenseur des hypercontraintes peut s'interpréter comme l'introduction d'un simple module sécant élastoplastique, dans le but de réduire au maximum le nombre de paramètres.

### VI.2.4 Mise en évidence d'une longueur interne

Dans le cas simplifié quasi-uniaxial, le rôle que joue la longueur caractéristique associée aux modules $\underset{\approx\approx}{\mathbf{A}}$ peut être mis en évidence.

Considèrons le problème de la traction d'une plaque élastoplastique compressible adoucissante. Le comportement du matériau est décrit par une loi élastoplastique isotrope avec un critère elliptique.
On choisit :

$$\nu = 0 \quad \text{et} \quad F = \frac{C}{2} \tag{VI.28}$$

de sorte qu'aucune déformation ni écoulement latéral n'est observé en traction selon la longueur de la plaque (axe 2). On considère un écrouissage linéaire avec adoucissement de la forme :

$$\sigma_y = \sigma_0 + Hp \tag{VI.29}$$

On s'intéresse au cas où les déformations plastiques $\underset{\sim}{\mathbf{e}}^p$ et $\underset{\approx}{\mathbf{K}}^p$ restent nulles pendant toute la simulation. Seule la déformation plastique classique $\underset{\sim}{\varepsilon}^p$ est active. Pour cela, il suffit de prendre $a_1 = a_2 = a_3 = b = 0$ dans la formulation à un seul critère (équation (VI.26)). Les seuls paramètres pertinents à préciser sont alors les modules d'élasticité supplémentaires. Les coefficients de $\underset{\approx\approx}{\mathbf{A}}$ sont tous pris égaux à une même valeur $A$.

Dans ces conditions, on a :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{C+F}\,|\sigma_{22}| \tag{VI.30}$$

$$\dot{\varepsilon}^p_{22} = \dot{p}\,\sqrt{C+F} \tag{VI.31}$$

$$\dot{p} = \frac{2\mu\sqrt{C+F}\dot{\varepsilon}_{22}}{2\mu(C+F)+H} \tag{VI.32}$$

Pour le trajet monotone, on obtient donc :

$$p = \frac{2\mu\sqrt{C+F}}{2\mu(C+F)+H}(\varepsilon_{22} - \frac{\sigma_0}{2\mu\sqrt{C+F}}) \tag{VI.33}$$

Les équations d'équilibre et les relations d'élasticité s'écrivent :

$$\begin{cases} (\sigma_{22} + s_{22})_{,2} = 0 \\ M_{222,2} + s_{22} = 0 \\ \sigma_{22} = 2\mu(\varepsilon_{22} - \varepsilon^p_{22}) = \dfrac{2\mu}{2\mu(C+F)+H}(H\varepsilon_{22} + \sigma_0\sqrt{C+F})s_{22} = 2\mu(\varepsilon_{22} - \chi_{22}) \\ M_{222} = A\chi_{22,2} \end{cases} \tag{VI.34}$$

On obtient finalement un système de deux équations à deux inconnues $(\varepsilon_{22}, \chi_{22})$ :

$$\begin{cases} \bar{H}\varepsilon_{22,2} + 2\mu(\varepsilon_{22,2} - \chi_{22,2}) = 0 \\ A\chi_{22,22} + 2\mu(\varepsilon_{22} - \chi_{22}) = 0 \end{cases} \tag{VI.35}$$

avec

$$\bar{H} = \frac{2\mu H}{2\mu(C+F) + H} \tag{VI.36}$$

La microdéformation $\chi_{22}$ est alors solution de l'équation

$$\chi_{22,222} - \frac{2\mu\bar{H}}{A(\bar{H}+2\mu)}\,\chi_{22,2} = 0 \tag{VI.37}$$

Lorsque $H$ est négatif, la solution est sinusoïdale et la longueur d'onde vaut :

$$\frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{A(\bar{H}+2\mu)}{2\mu|\bar{H}|}} \tag{VI.38}$$

Pour rappel, la dimension de $A$ est MPa.mm$^2$. Un seul arc de sinusoïde est observé car la solution précédente n'est valable que si la condition de plasticité est remplie. En dehors de la bande, le matériau se décharge élastiquement. La figure VI.4 montre que la largeur de bande obtenue par un calcul par éléments finis est conforme à la prédiction théorique (équation (VI.38)).

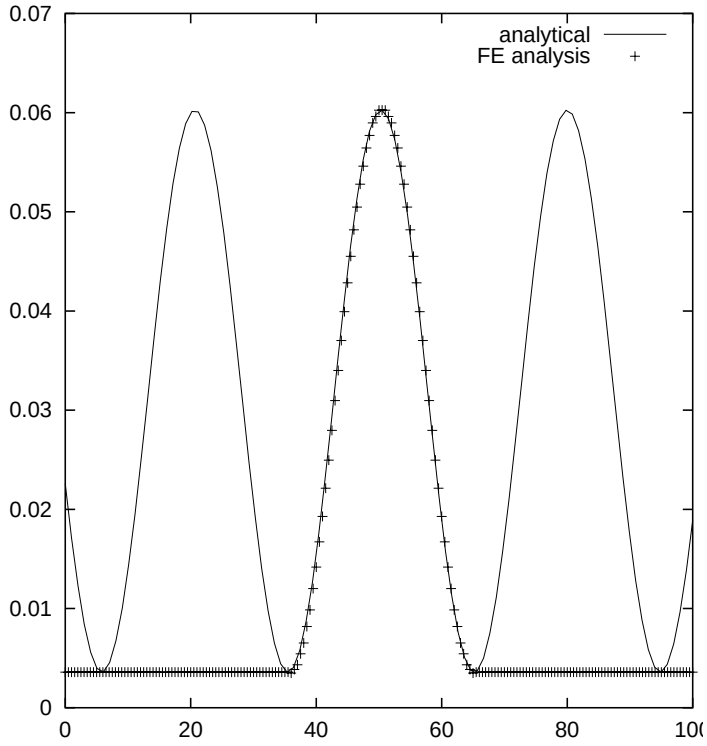



**Figure VI.4** : Superposition du profil de déformation plastique cumulée le long de l'axe vertical calculé par éléments finis pour un milieu micromorphe, et d'une fonction sinusoïdale ayant la longueur d'onde prévue analytiquement.

## VI.3 Problème d'un trou dans un milieu micromorphe

Le problème de l'inclusion d'Eshelby, et le problème dérivé de l'hétérogénéité élastique, jouent un rôle fondamental en mécanique des matériaux hétérogènes. Il a été résolu pour un milieu classique élastique dès les années 1950, mais aussi, plus récemment, pour un milieu de Cosserat (Cheng et He, 1995; Cheng et He, 1997). Le cas particulier d'un trou cylindrique dans une matrice infinie de Cosserat a déjà été obtenu par (Kim et Eringen, 1973). En revanche, il ne semble pas, à notre connaissance, que de telles solutions existent pour un milieu micromorphe. C'est pourquoi, une étude numérique par éléments finis est menée ici. Premièrement, on insistera sur une propriété remarquable de la solution, spécifique au milieu micromorphe. Puis, cette propriété est mise à profit pour l'application aux mousses de nickel.

Les calculs présentés sont réalisés avec le maillage complet de la plaque trouée. En effet, si l'on connait les conditions de symétrie à appliquer sur les déplacements pour n'utiliser qu'un quart du maillage, de telles conditions ne sont pas connues a priori sur les degrés de liberté $\underset{\sim}{\chi}$ ni sur les efforts correspondants $\underline{\mathbf{M}}$. Les cartographies et dépouillements sont quant à eux donnés uniquement sur un quart du maillage.

### VI.3.1 Effet d'échelle dans le cas d'un milieu micromorphe élastique

Le problème d'un trou cylindrique dans une matrice quasi-infinie soumise à une traction à l'infini, en conditions de contraintes planes, est résolu ici par la méthode des éléments finis dans le cas d'un milieu micromorphe élastique isotrope, suivant les lois de comportements (VI.21) à (VI.24). On s'intéresse plus particulièrement au facteur de concentration de contrainte à la section minimale (équateur). Le résultat dépend du rapport entre le rayon du trou $R$ et de la longueur caractéristique $l_c$.

Pour les simulations, les propriétés suivantes sont utilisées : $E = 400$ MPa, $\nu = 0,2$. La longueur caractéristique est $l_c = 0,3$ mm.
La figure VI.5 montre le profil horizontal des déformations $\varepsilon_{22}/\varepsilon_{22}^{\infty}$ le long du ligament partant de l'équateur, pour différentes tailles de trou. La déformation de traction imposée à l'infini est $\varepsilon_{22}^{\infty}$. On voit que lorsque la taille du trou est grande par rapport à la longueur caractéristique $l_c$, le profil obtenu coïncide avec la courbe attendue dans le cas classique avec un facteur de concentration de contrainte de 3. Au contraire, lorsque le trou devient de plus en plus petit, l'effet concentrateur s'atténue. A la limite, pour des trous beaucoup plus petits que la longueur caractéristique, le facteur de concentration de la déformation tend vers 1. Il n'existe donc plus d'effet de concentration de déformation ni de contrainte. Comme l'indique la figure VI.6, le champ de déformation autour du trou devient de plus en plus homogène.

Le milieu ne remarque plus la présence des trous de petites tailles. C'est une propriété caractéristique du milieu micromorphe (et sans doute aussi du second gradient, cela reste à étudier). Cependant, l'effet concentrateur subsiste dans le cas d'un milieu de Cosserat. Cela s'explique par le fait que le milieu de Cosserat ne joue que sur les rotations, tandis que le milieu micromorphe est sensible aux gradients des déformations comme des rotations.

### VI.3.2 Identification de la longueur caractéristique dans le cas d'une mousse de nickel

La disparition progressive de l'effet concentrateur d'un trou dans un milieu micromorphe lorsque sa taille diminue est comparable à l'effet d'échelle observé dans les mousses de nickel grâce aux mesures de champs. Cependant, dans notre cas, le comportement de la mousse est élastoplastique. L'analyse par éléments finis du trou dans un milieu infini est donc reprise dans cette section pour le cas élastoplastique. L'objectif est d'identifier une longueur caractéristique $l_c$ permettant de rendre compte de l'effet d'échelle observé expérimentalement.

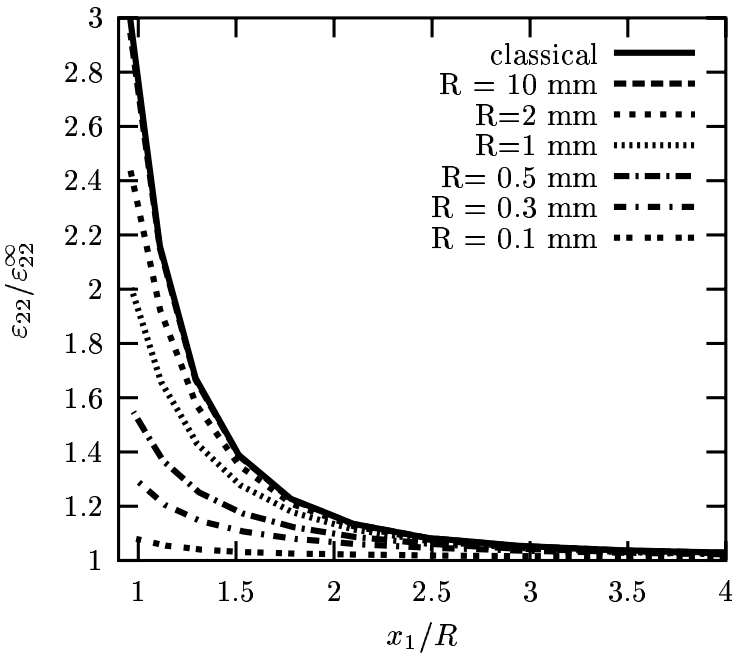



**Figure VI.5** : Profil de déformations axiales le long du ligament dans une plaque micromorphe élastique trouée sollicitée en traction à l'infini, en conditions de contraintes planes : influence de la taille du trou. Les coefficients matériaux sont $E = 400$ MPa, $\nu = 0,2$, $l_c = 0,3$ mm.

Les paramètres du modèle décrit par les équations (VI.25) à (VI.27), sont donnés dans le tableau VI.2. Il s'agit en fait des paramètres de la loi classique élastoplastique compressible identifiée au paragraphe VI.1.2 plus 4 paramètres additionnels associés aux lois linéaires micromorphes supplémentaires. Dans un souci de simplification, ces lois sont supposées isotropes.
En particulier,

$$\underset{\sim}{\mathbf{s}} = \lambda^{(a)} \mathrm{Tr}\, \underset{\sim}{\mathbf{e}}\, \underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu^{(a)} \{\underset{\sim}{\mathbf{e}}\} + 2\mu_c^{(a)} \}\underset{\sim}{\mathbf{e}}\{ \tag{VI.39}$$

*Remarque : les parenthèses* $\{\}$ *et* $\}\{$ *désignent respectivement les parties symétriques et antisymétriques des tenseurs concernés.*

Les constantes $\lambda^{(a)}, \mu^{(a)}$ et $\mu_c^{(a)}$ sont choisies suffisamment élevées pour que $\underset{\sim}{\mathbf{e}}$ reste très proche de zéro, de sorte que la microdéformation $\underset{\sim}{\chi}$ s'identifie pratiquement au gradient du déplacement.

Pour des raisons de simplicité, la matrice $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ est remplie à l'aide de la formule (VI.24) en prenant un tenseur $\underset{\sim}{\mathbf{c}}$ isotrope distinct de la matrice orthotrope intervenant dans l'équation (VI.21). Deux paramètres sont donc introduits : $(\lambda^{(A)}, \mu^{(A)} = \mu_c(A))$ et la longueur $l_c$.
La loi d'écrouissage du modèle élastoplastique est ici :

$$\sigma_y = \sigma_0 + Q_1(1 - \exp(-b_1 p)) + Q_2(1 - \exp(-b_2 p)) \tag{VI.40}$$

Avec le jeu de paramètres identifiés, la présence d'un trou de 4 mm conduit à une concentration de déformation proche de la solution classique et est donc conforme à l'expérience. En revanche, un trou de 1 mm ne conduit qu'à une légère concentration, comme observé expérimentalement avec les mesures de champs. C'est ce que montre la figure VI.7. Les cartes de déformations autour du trou pour des tailles de trous différentes dans le cas élastoplastique sont rassemblées sur la figure VI.8.

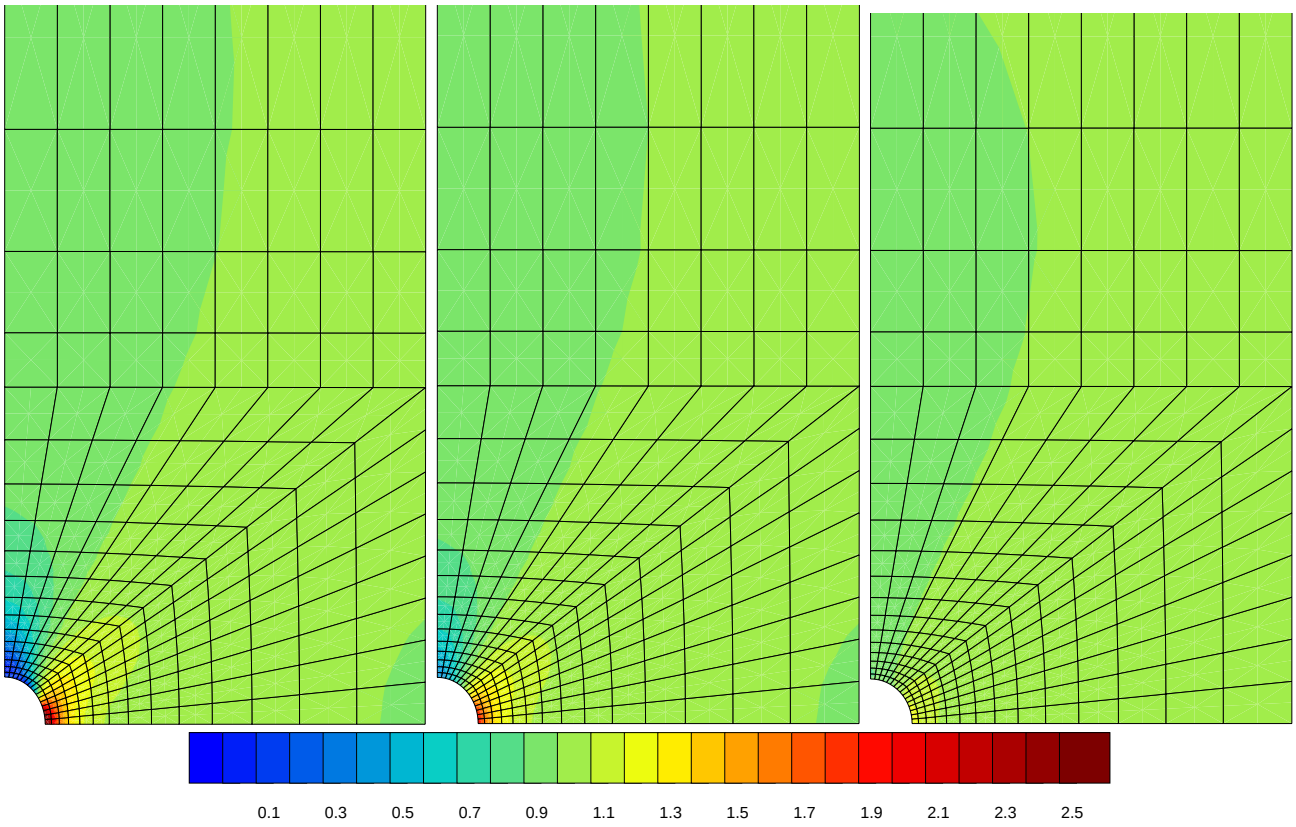



**Figure VI.6** : Carte de déformations axiales dans une plaque micromorphe élastique trouée sollicitée en traction à l'infini, en conditions de contraintes planes. La grandeur représentée est $\varepsilon_{22}/\varepsilon_{22}^{\infty}$. La carte de gauche correspond à la simulation avec un milieu continu élastique classique, donc indépendante de la taille du trou. Les deux autres cartes sont pour des plaques micromorphes avec des trous de rayon $R = 1$ mm et $R = 0,3$ mm respectivement. Les coefficients matériaux sont les mêmes que pour la figure VI.5.

| $C_{11}$ MPa | $C_{22}=C_{33}$ MPa | $C_{12}$ MPa | $C_{13}$ MPa | $C_{23}$ MPa | $C_{44}$ MPa | $E^{(a)}$ MPa | $\nu^{(a)}$ | $\mu_c^{(a)}$ MPa | $E^{(A)}$ MPa | $\nu^{(A)}$ | $l_c$ mm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 464 | 239 | 172 | 172 | 142 | 105 | 40000 | 0,2 | 10000 | 400 | 0,2 | 0,06 |

| $C$ | $F$ | $P$ | $Q$ | $R$ | $H_a$ | $H_b$ | $H_c$ | $H_d$ | $H_e$ | $H_f$ | $R_0$ MPa | $Q_1$ MPa | $b_1$ | $Q_2$ MPa | $b_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,000682 | 1 | 36,6 | 22,6 | 0,41 | 1,8 | 1,75 | 1,49 | 1 | 1 | 0,3 | 0,51 | 611 | 7442 | 0,0013 |

**Tableau VI.2** : Coefficients du modèle *microfoam* pour les mousses de nickel.

Comme on peut le voir sur les figures VI.7 et VI.8, le modèle micromorphe est capable de rendre compte de l'effet d'échelle observé expérimentalement. Toutefois, l'objectif de ce modèle n'est pas de reproduire les fluctuations locales observées au paragraphe a) (page 153). Une optimisation plus poussée ou une loi de comportement généralisée plus riche ne permettent pas d'améliorer significativement la comparaison calcul/expérience.

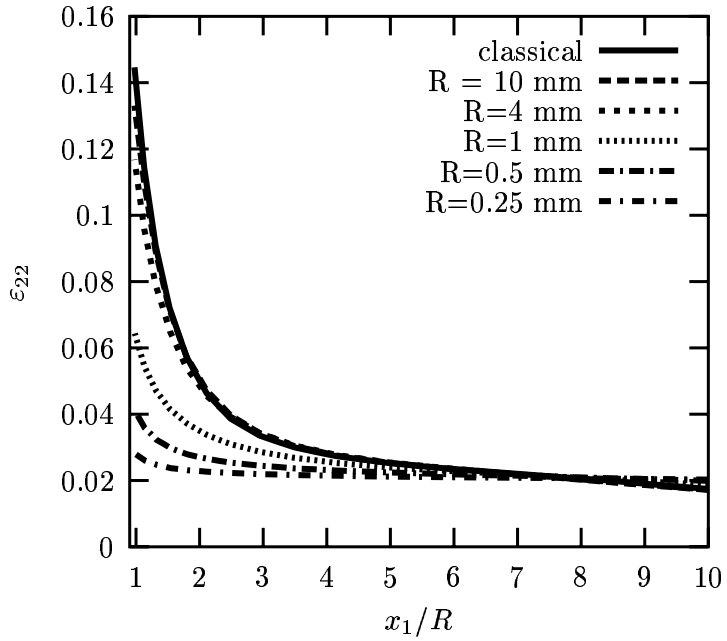



**Figure VI.7** : Profil de déformations axiales le long du ligament dans une plaque micromorphe élastoplastique trouée sollicitée en traction à l'infini, en conditions de contraintes planes : influence de la taille du trou. La longueur caractéristique vaut $l_c = 0,06$ mm.

L'effet d'échelle observé nous amène à nous interroger sur la signification d'un trou "macroscopique" dans un milieu poreux. Qu'est-ce qu'un trou dans une mousse, sinon une cellule géante ? Il est évident que l'effet d'entaille doit disparaître lorsque le rayon devient de l'ordre de grandeur de la taille d'une cellule. Cependant, en remplaçant la mousse par un milieu homogène équivalent classique, ce dernier est incapable de décrire la mousse dans ces situations extrêmes. Le modèle *microfoam* permet donc de garder une modélisation continue dans le cas de gradients de sollicitation dont la longueur d'onde de variation s'approche de la taille des cellules. Il est bien évident que si l'on cherche à décrire avec plus de précision de telles situations, il faut renoncer à l'approche continue et passer à une approche discrète (par exemple, l'utilisation des réseaux de poutres trouvés au chapitre I). La modélisation proposée ici permet de traiter la transition entre la modélisation continue à l'aide d'un milieu homogène équivalent et la représentation discrète détaillée de la microstructure.

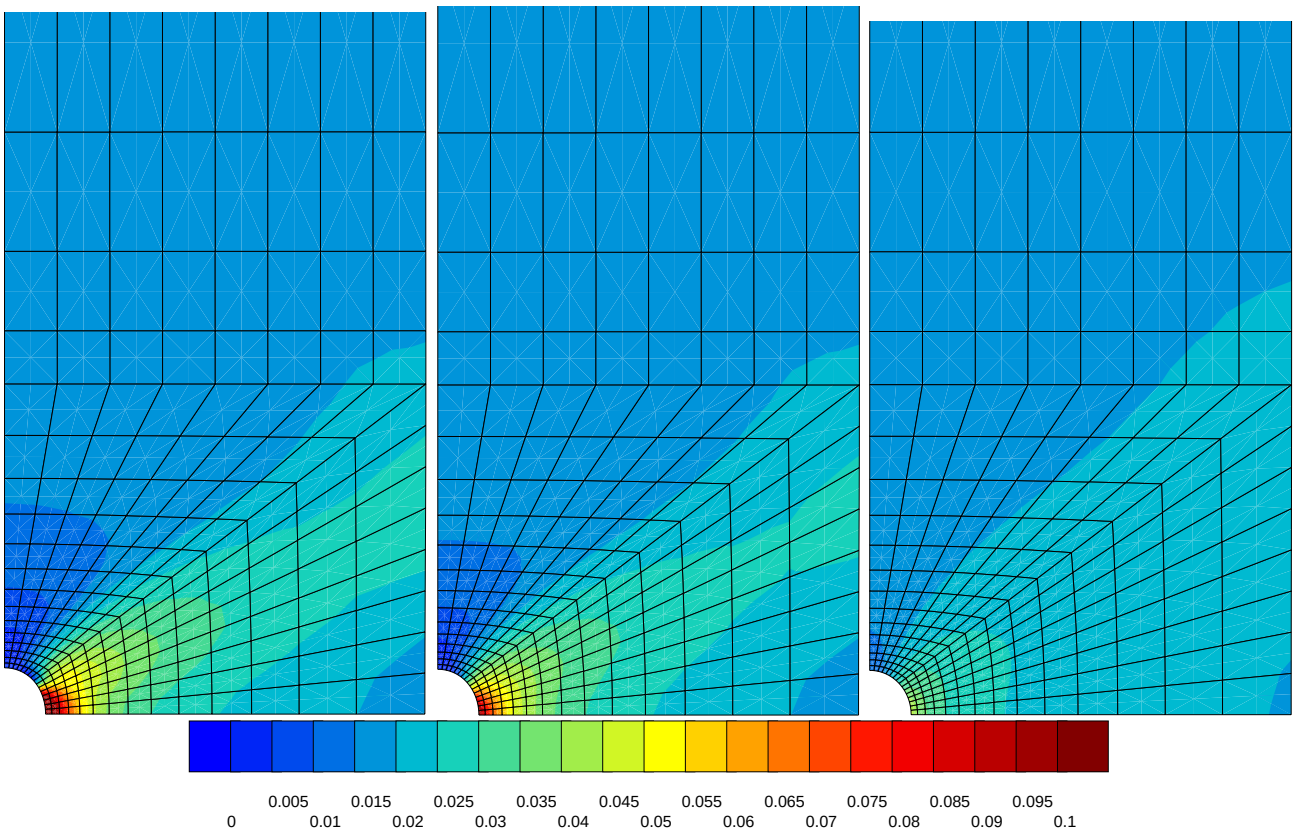



**Figure VI.8** : Carte de déformations axiales dans dans une plaque micromorphe élastoplastique trouée sollicitée en traction à l'infini, en conditions de contraintes planes. La grandeur représentée est $\varepsilon_{22}/\varepsilon_{22}^{\infty}$. La carte de gauche correspond à la simulation avec un milieu continu élastoplastique classique, donc indépendante de la taille du trou. Les deux autres cartes sont pour des plaques micromorphes avec des trous de rayon $R = 4$ mm et $R = 1$ mm respectivement. La longueur caractéristique vaut $l_c = 0,06$ mm.

L'enjeu d'une modélisation continue est important du point de vue du calcul de structures puisque de petites entailles réalisées dans la géométrie de pièces en mousse de nickel n'altèrent pas les propriétés de la structure. Ce fait peut maintenant être rendu de manière adéquate par le modèle *microfoam*. D'autres modélisations de cet effet peuvent être proposées, en particulier d'autres modèles non locaux. Toutefois, le modèle proposé dans cette section est l'un des plus économes et ne requiert l'identification que d'un seul paramètre, la longueur caractéristique $l_c$, au prix d'hypothèses simplificatrices. Le milieu continu généralisé doit en tout cas être sensible non seulement aux effets des gradients des rotations mais aussi à ceux des gradients des déformations. C'est pourquoi l'emploi d'un milieu micromorphe plutôt que d'un milieu de Cosserat est préféré pour la description des mousses.

## VI.4 Application à la rupture des mousses de nickel

Une modélisation continue des phénomènes de rupture dans les mousses de nickel est abordée dans cette section. Cette problématique part du constat que la zone fissurée dans une mousse est relativement diffuse (voir figure VI.11). On a déjà vu par exemple que des brins non déchirés subsistent en arrière de la fissure. Cette constatation incite à penser qu'une modélisation non locale de la déchirure de la mousse pourrait être tout à fait pertinente. C'est pourquoi on étend ici le modèle *microfoam* à la rupture des mousses. On montrera au passage que l'extension du modèle classique est quant à lui insuffisant dans le cas de la rupture, en raison d'une trop forte dépendance des résultats vis-à-vis du maillage.

Les calculs présentés sont réalisés avec un maillage complet de la plaque fissurée. En effet, si les conditions de symétrie à appliquer pour les déplacements sont connues pour n'utiliser qu'un quart du maillage, elles ne le sont pas *a priori* sur les degrés de liberté $\underset{\sim}{\chi}$ ni sur les efforts correspondants $\underline{\mathbf{M}}$. Les cartographies et les dépouillements seront quant à eux donnés uniquement sur un quart du maillage.

### VI.4.1 Identification d'un modèle simplifié d'endommagement dans le cas d'une bande de mousse en traction

| $p_{crit}$ | $p_{max}$ | $p_{ultim}$ | $\sigma_{limit\,load}$ MPa |
|---|---|---|---|
| 0,075 | 0,085 | 0,135 | 0,01 |

**Tableau VI.3** : Paramètres caractérisant la partie adoucissante de la fonction d'écrouissage.

Les mécanismes de rupture ductile des mousses de nickel ont été étudiés dans le détail aux sections I.5.4 et II.4. Ils sont complexes et il n'existe pas aujourd'hui de modèle micromécanique de rupture ductile des mousses aussi évolués que pour les matériaux métalliques massifs. On n'a pas cherché à développer un tel modèle ici de sorte qu'une telle démarche reste à explorer. Le choix d'une représentation phénoménologique calée sur la courbe de traction dans le sens RD menée jusqu'à rupture a été fait. Comme nous ne disposons pas de mesures quantitatives, nous décidons de ne pas introduire de variable d'endommagement explicite dans la modélisation. On introduit à la place dans la fonction d'écrouissage un adoucissement relativement brutal après une valeur critique de la variable de déformation plastique cumulée $p = p_c$. Il s'agit donc d'un critère en déformation plastique critique. La fonction d'écrouissage/adoucissement employée est décomposée en trois régimes. Le premier régime est régi par l'équation (VI.40) qui décrit l'écrouissage du matériau. Pour $p_{crit} \ll p \ll p_{ultim}$, la fonction d'écrouissage est une parabole tangente à la courbe (VI.40) en $p = p_{crit}$ et atteignant son maximum en $p = p_{max}$. Pour $p_{ultim} \ll p$, la courbe est une exponentielle décroissante tangente à la parabole précédente en $p = p_{ultim}$ et tendant vers la valeur $\sigma_{limit\,load}$ quand $p$ tend vers l'infini. Cela fait 4 paramètres pour décrire la chute de charge lors de la rupture d'une bande en traction.

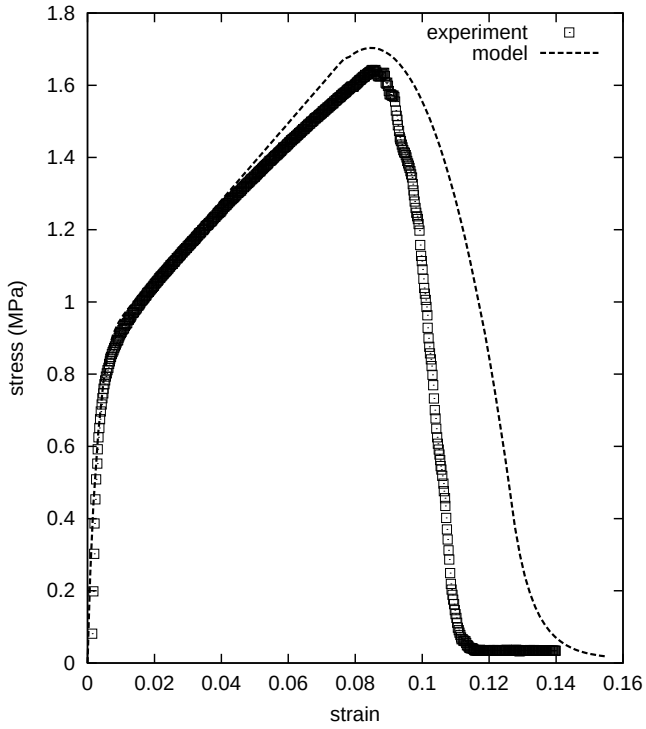



**Figure VI.9** : Essai de traction dans le sens RD jusqu'à rupture : expérience et modèle simplifié d'endommagement.

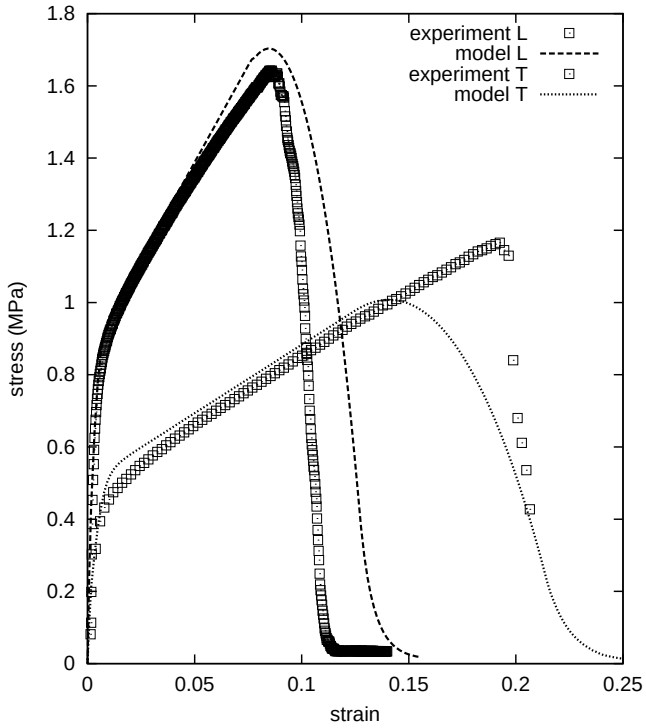



**Figure VI.10** : Essai de traction dans le sens TD jusqu'à rupture : expérience et prédiction du modèle simplifié d'endommagement.

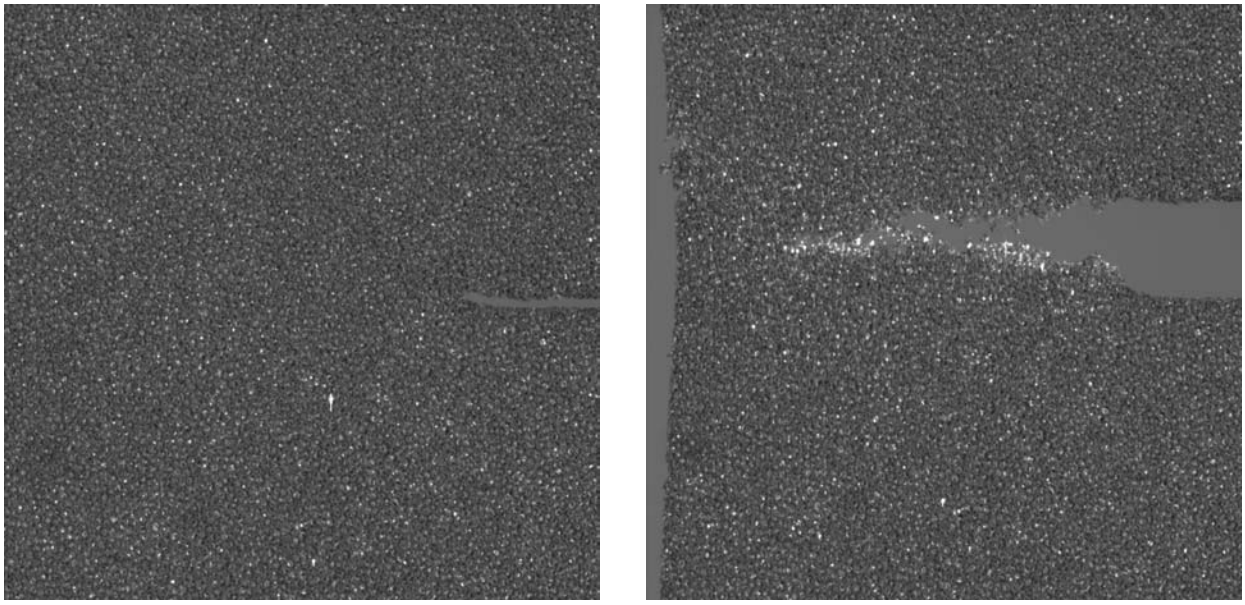


**Figure VI.11** : Fissure horizontale centrale, symétrique, dans une plaque de mousse normale à la direction RD : demi-plaque initiale à gauche, et propagation de la fissure à droite.

La figure VI.9 montre la simulation obtenue avec le jeu de paramètres du tableau VI.3 et la comparaison avec l'expérience. L'adoucissement est choisi volontairement moins violent que dans l'expérience, pour éviter des difficultés de convergence considérables lors des calculs de fissuration qui vont suivre, avec le modèle de plasticité classique. On remarque que cet essai de traction sur une bande de mousse est simulée comme un essai sur élément de volume. La courbe simulée de la figure VI.9 correspond donc au comportement intrinsèque retenu. Les simulations de propagation de fissures sont réalisées au paragraphe suivant avec ce modèle.

La figure VI.10 montre la prédiction du modèle pour un essai de traction dans le sens TD et la comparaison avec l'expérience. Le modèle sous-estime la ductilité du matériau mais montre qu'il est capable de rendre compte de manière qualitative de l'anisotropie de la ductilité de la mousse. Cette anisotropie vient de l'utilisation du critère de rupture $p = p_{crit}$ qui intègre non seulement un effet de déformation critique mais aussi un effet d'anisotropie grâce à la matrice de Hill qui intervient dans la définition de $p$ (équation (VI.5)).

### VI.4.2 Prédiction de la déchirure d'une mousse présentant une fissure horizontale

L'essai de propagation stable d'une fissure centrale dans une plaque de mousse sollicitée en traction dans la direction RD est simulé. La fissure mesure 10 mm de long et la largeur de l'éprouvette est de 56 mm. Les images de la demi-plaque fissurée initiale et de la fissure propagée sont sur la figure VI.11. On simule cet essai par éléments finis, successivement à l'aide du modèle classique de plasticité compressible incluant l'adoucissement final, puis avec le modèle *microfoam* incluant aussi cet adoucissement.

#### a) Cas classique : mise en évidence de l'effet de maillage

Conformément à l'essai, une vitesse de déplacement vertical est imposée au bord supérieur de la plaque tandis que le bord inférieur est bloquée dans la direction verticale. Les calculs par éléments finis sont réalisés avec des éléments 2D quadratiques à intégration réduite, un algorithme global de Newton–Raphson et une intégration locale de Newton implicite. La matrice tangente utilisée est la matrice tangente cohérente.

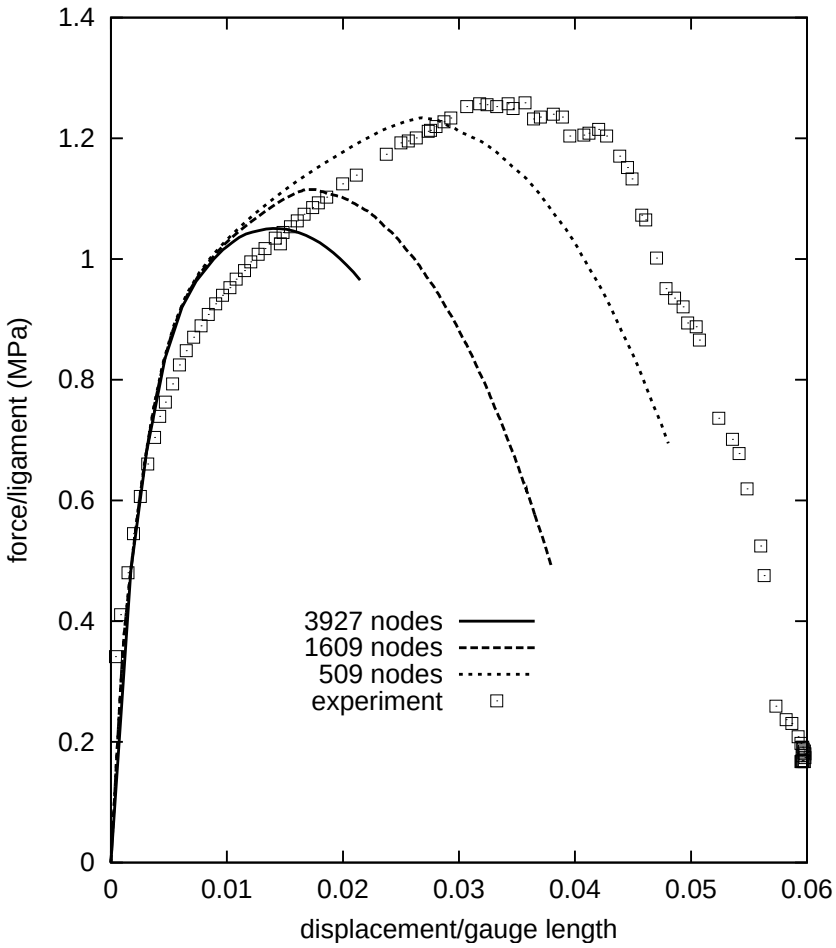



**Figure VI.12** : Courbe de traction dans le sens RD d'une bande de mousse avec une fissure horizontale : résultat expérimental et simulation pour 3 maillages différents avec le modèle élastoplastique classique.

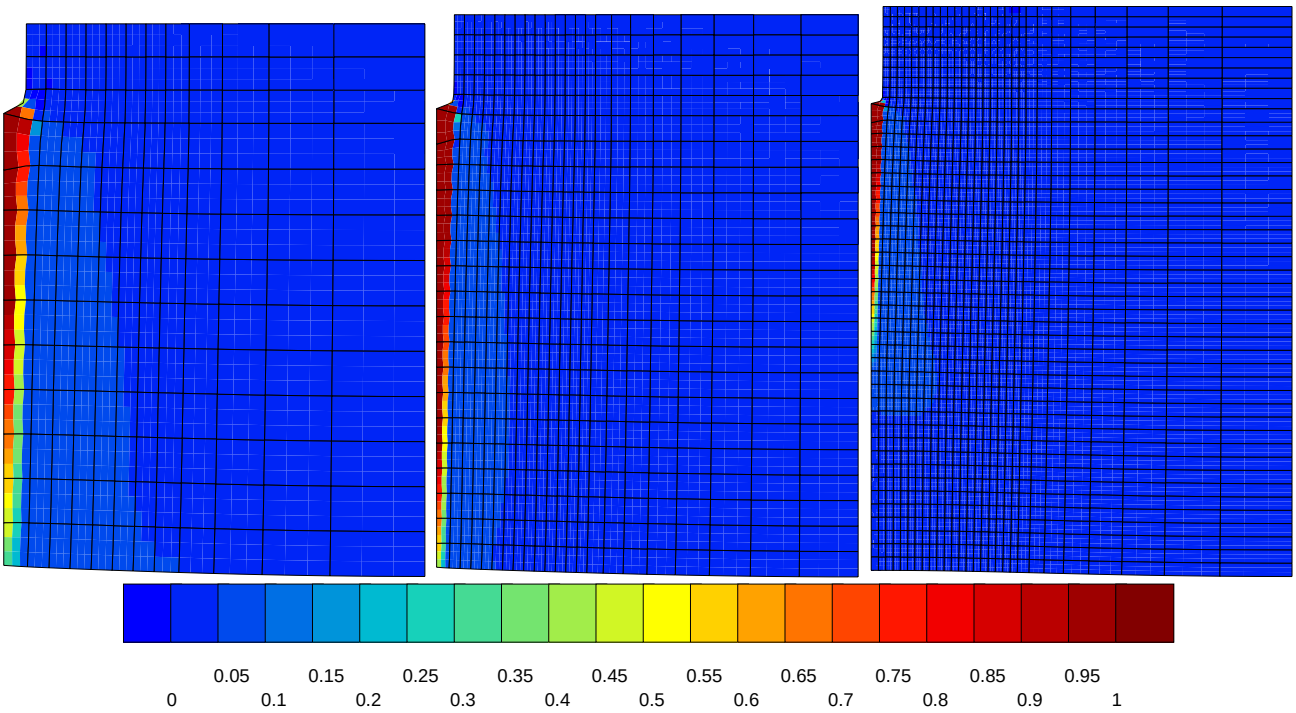



**Figure VI.13** : Propagation de la fissure pour trois maillages différents dans le cas d'un modèle élastoplastique compressible classique.

Les courbes force/déplacement correspondant à trois maillages différents de la plaque fissurée sont données sur la figure VI.12. Cette figure montre la dépendance considérable des résultats vis-à-vis du maillage. En particulier, lorsque le nombre de degrés de liberté augmente, la rupture devient de plus en plus précoce. Les maillages sont données sur la figure VI.13 ainsi que les cartographies de déformation plastique cumulée pour une certaine distance de propagation de la fissure. La déformation est concentrée dans une rangée de points de Gauss de sorte que la largeur de la fissure devient d'autant plus faible que le maillage est raffiné. Ce phénomène classique de dépendance vis-à-vis du maillage des simulations de localisation de la déformation ou de l'endommagement est bien connu et a fait l'objet de nombreuses études systématiques (Besson et al., 2001). Il est lié à la perte d'ellipticité du problème aux dérivées partielles qui possèdent dès lors une infinité de solutions dépendant de manière non continue des conditions aux limites.

Il est alors d'usage de faire appel à des méthodes dites de *régularisation* pour restaurer au moins plus longtemps l'ellipticité du problème. L'utilisation de milieux continus généralisés représente une méthode de régularisation. C'est pourquoi le modèle *microfoam* est appliqué à la simulation de la propagation de fissure dans les mousses.

### b) Cas du milieu micromorphe élastoplastique

Le modèle *microfoam*, qui assimile la mousse comme un milieu micromorphe élastoplastique compressible et anisotrope, identifié dans le cas de plaques trouées, peut être utilisé en incluant dans la loi d'écrouissage les mêmes régimes d'adoucissement que dans le modèle classique. On garde alors pour les paramètres spécifiques au modèle micromorphe (en premier chef la longueur caractéristique $l_c$) les valeurs trouvées au paragraphe VI.3.

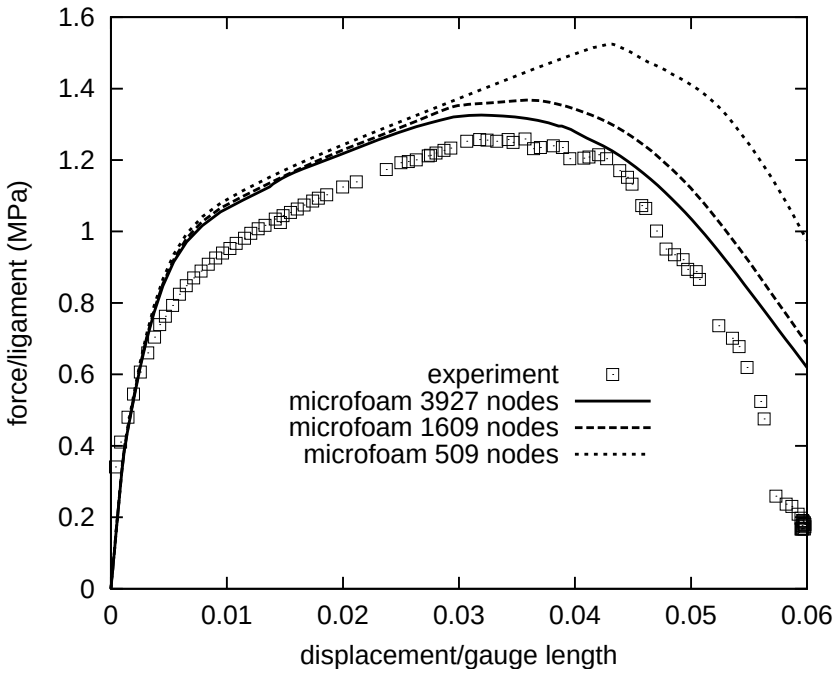



**Figure VI.14** : Courbe de traction dans le sens RD d'une bande de mousse avec une fissure horizontale : résultat expérimental et simulation pour 3 maillages différents avec le modèle *microfoam*.

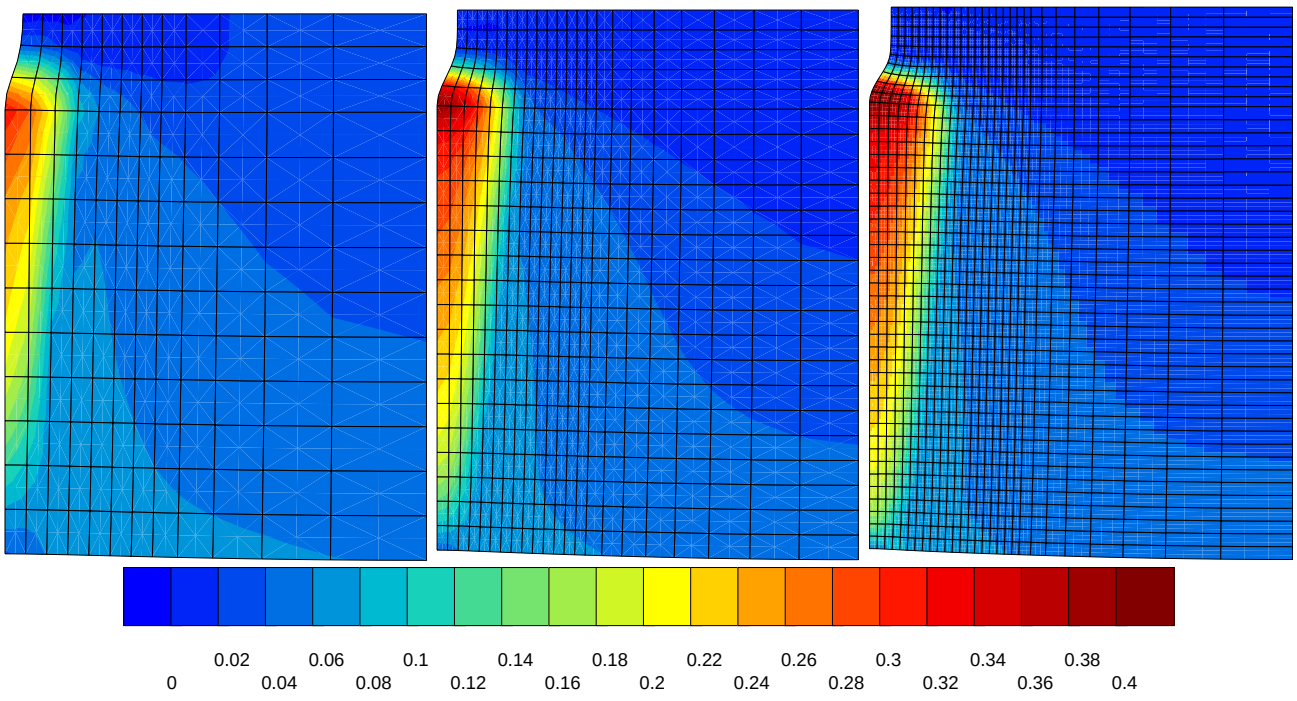



**Figure VI.15** : Propagation de la fissure pour trois maillages différents avec le modèle *microfoam*.

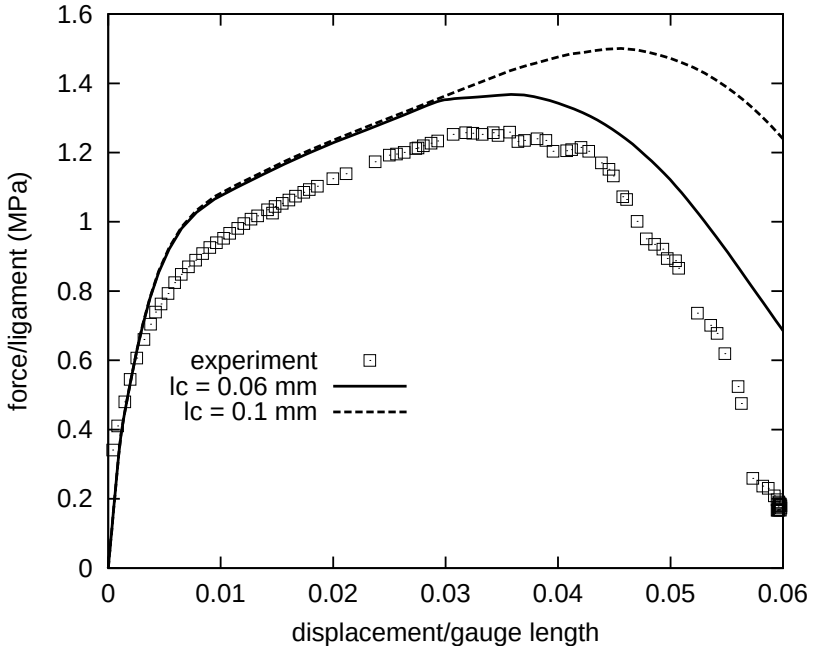



**Figure VI.16** : Courbe de traction dans le sens RD d'une bande de mousse avec une fissure horizontale : résultat expérimental et simulation pour 2 longueurs caractéristiques différentes avec le modèle *microfoam*.

Les calculs par éléments finis sont réalisés avec des éléments micromorphes 2D quadratiques à intégration réduite, un algorithme global de Newton–Raphson et une intégration locale de Runge–Kutta. La matrice tangente utilisée est la matrice d'élasticité.

Les courbes force/déplacement obtenues pour la plaque fissurée en traction sont données sur la figure VI.14. On constate que la dépendance des résultats vis-à-vis du maillage est nettement moins marquée. La courbe semble converger vers une courbe unique quand le nombre de degrés de liberté augmente. Cette courbe qui converge surestime quelque peu le niveau de contrainte mais prévoit de manière assez précise le début de la propagation de la fissure. Les cartographies de déformation plastique cumulée (voir figure VI.15) montrent que la fissure est représentée par une zone de déformation intense mais de largeur finie. Cette largeur, de l'ordre de 1 à 2 mm dépend relativement peu du raffinement du maillage.

La convergence des résultats est obtenue lorsque la zone fissurée est maillée avec suffisamment de finesse. En gros, la taille de maille doit être inférieure à la longueur caractéristique du milieu. Ceci est assez naturel puisque cette dimension caractérise aussi la taille des zones à gradients de déformation intenses autorisées.

Les résultats obtenus sont très sensibles à la longueur caractéristique du modèle. La figure VI.16 montre deux courbes force/déplacement obtenues pour deux longueurs caractéristiques différentes. Plus la longueur caractéristique est grande et plus la rupture est retardée.

Les calculs effectués avec 8 degrés de liberté par nœud sont évidemment plus lourds que le calcul classique correspondant. Cependant, ils "se passent mieux", c'est-à-dire que la réduction drastique du pas de temps automatique observée classiquement lorsque des phénomènes de localisation se produisent, conduisant souvent à des problèmes de convergence douloureux, est nettement moins critique avec le calcul micromorphe, alors même que la localisation continue à se produire. C'est ce qui rend ce type d'approche compétitif.

## VI.5 Synthèse des principaux résultats de la troisième partie

Les principaux résultats de la troisième partie sont résumés dans cette section. Deux aspects du comportement multiaxial des mousses de nickel ont été abordés dans cette partie. Les coefficients d'expansion latérale plastique ont été déterminés expérimentalement selon deux techniques : l'une mettant en jeu des capteurs mécaniques, l'autre utilisant des essais photomécaniques. Une approche continue a aussi été proposée en vue de simuler le comportement des mousses métalliques. Un modèle élastoplastique anisotrope compressible a alors été développé et identifié à partir de la base expérimentale du chapitre V. Cependant, le modèle continu "classique" ne permet pas de prédire l'effet d'échelle d'un trou "macroscopique" observé dans la mousse. De façon à pallier cette limitation du modèle mécanique "classique" , une extension vers un modèle micromorphe est proposée. Grâce à l'introduction d'une longueur caractéristique $l_c$, le modèle micromorphe se montre capable de décrire l'effet d'échelle.

**• EXPERIENCES**

| Type de mousse | Sens de prélèvement | Extensométrie "traditionnelle" $\nu_{12}^p \quad \nu_{13}^p$ | Extensométrie sans contact $\nu_{12}^p$ |
|---|---|---|---|
| MN 110-035-16 | RD | $0{,}5 \pm 0{,}09$ | |
| | TD | 0,24 ± 0,02 | |
| MN 110-042-16 | RD | 0,53 ± 0,06 | $0{,}42 \pm 0{,}03$ |
| | TD | 0,23 ± 0,03 | 0,16 ± 0,02 |
| MN 110-050-16 | RD | 0,40 ± 0,03 | 0,48 ± 0,04 |
| | TD | 0,19 ± 0,02 | 0,17 ± 0,02 |

Au cours de ces essais mécaniques, trois propriétés du comportement des mousses ont été mises en évidence :

- la mousse est un matériau compressible ;
- quelle que soit la direction de sollicitation, la mousse présente des hétérogénéités de déformations, qui forment des bandes ;
- un trou cylindrique "macroscopique" de diamètre inférieur ou égal à 4 cellules (2 mm) n'affecte pas le comportement mécanique en traction d'une plaque de mousse.

**• MODELES CONTINUS**

1. Modèle "classique" élastoplastique compressible anisotrope

$$\begin{cases} f(\underset{\sim}{\sigma}, \sigma_y) = \sigma_{eq} - \sigma_y \qquad \text{avec} \qquad \sigma_{eq} = \left( \dfrac{3}{2}\, C\, \underset{\sim}{\sigma}^{\text{dev}} : \underset{\approx}{\mathbf{H}} : \underset{\sim}{\sigma}^{\text{dev}} + F\, (\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\sigma})^2 \right)^{1/2} \\ \underset{\sim}{\mathbf{N}} = \dfrac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \\ \sigma_y = \sigma_0 + Q_1(1 - \exp(-b_1 p)) + Q_2(1 - \exp(-b_2 p)) \end{cases} \tag{VI.41}$$

A partir de ces trois équations, le modèle classique est capable de décrire le comportement anisotrope de la mousse autour d'une concentration de contrainte ou de déformation. Cependant, cette approche a montré des limitations. En effet, le modèle classique s'avère incapable de prendre en compte les fluctuations de la déformation observées sur une éprouvette lisse. De plus, l'effet d'échelle obtenu expérimentalement pour un trou de petite taille "macroscopique" demeure impossible à simuler avec la modélisation classique.

2. Modèle micromorphe élastoplastique compressible anisotrope : *microfoam*

Le milieu micromorphe permet avec un seul paramètre supplémentaire de prendre en compte l'effet d'échelle observé lors d'un comportement élastique ou élastoplastique. De plus, ce modèle a montré sa capacité à fournir une bonne estimation de la ductilité des mousses en présence de fissures. Les résultats de simulations par éléments finis réalisés sur la fissure montrent aussi que le résultat ne dépend pas du pas du maillage, contrairement à la modélisation classique. Cependant, l'anisotropie de la ductilité de la mousse est décrite qualitativement même si le modèle sous-estime la ductilité du matériau. L'anisotropie de la ductilité est introduite dans le modèle par l'emploi de $p$ dans le critère de rupture. En effet, la matrice de Hill intervient indirectement dans la définition de $p$.

# CONCLUSIONS

# PERSPECTIVES

Cette étude a comme objectif d'identifier les mécanismes de déformation et de ruine, ainsi que de modéliser le comportement mécanique et le comportement à rupture de la mousse.

Les essais, réalisés sous tomographie aux rayons X, ont montré que les mécanismes de déformation et d'endommagement des mousses en compression sont très différents de ceux rencontrés en traction. Un essai de compression permet de mettre en valeur le fléchissement et le flambement des brins, parallèles à la direction de sollicitation. Une forte localisation de la déformation a également pu être observée au cœur de la mousse. En revanche, les essais de traction se traduisent par un alignement et un étirement des brins suivant la direction de sollicitation. De plus, la déformation est favorisée par le mouvement des brins libres à la surface de la mousse. Ces travaux ont aussi montré que la rupture est majoritairement transgranulaire et que la largeur de la zone endommagée s'étend sur cinq cellules environ. La rupture des mousses NiTECH semble donc liée à la faible épaisseur des brins, et non à la ségrégation d'impuretés aux joints de grains.
Les essais, réalisés sous tomographie aux rayons X, ont aussi permis de quantifier la structure de la mousse jusqu'à l'obtention de la cellule représentative. La cellule trouvée est un dodécahèdre. Elle comporte deux faces carrées, huit faces pentagonales et deux faces hexagonales. La forme de cette cellule n'a pas été employée dans la modélisation proposée au chapitre IV puisqu'une autre approche, fondée sur les mécanismes de déformation, a en effet été choisie.
L'étude de la structure a aussi permis de déterminer les dimensions des cellules et leur orientation. Les cellules apparaissent allongées suivant la direction de bullage. Un rapport de 1,5 différencie la plus grande et la plus petite des dimensions de la cellule. L'étude sur les dimensions des cellules a confirmé la cohérence entre l'anisotropie géométrique à celle observée mécaniquement. De plus, les analyses approfondies ont établi que la désorientation des cellules, engendrée par l'étirement de la mousse au cours du procédé de fabrication, est du second ordre par rapport à l'orientation des cellules de la mousse de polyuréthanne initiale.

Deux approches différentes ont été utilisées pour modéliser le comportement uniaxial et multiaxial de la mousse en traction. L'approche discrète, à partir d'un modèle analytique, a montré que le comportement mécanique uniaxial global de la mousse peut être prévu en fonction de sa densité et de l'anisotropie géométrique des cellules. Toutefois, la prise en compte des brins creux fait clairement apparaître que la non-linéarité du comportement des mousses ne peut pas seulement être expliqué à partir de l'arrivée de la plasticité et de la propagation du front élastique/plastique dans la poutre. L'extension de ce modèle vers les mousses à deux phases ouvre des horizons sur l'étude du comportement de mousses revêtues, laissant entrevoir des perspectives prometteuses quant à leurs propriétés. En ajoutant une épaisseur d'oxyde de nickel de 1,5 $\mu$m, un accroissement du module de Young de la mousse de près de 20 % est observé.
L'approche continue a confirmé qu'il est possible d'assimiler une mousse à un milieu homogène équivalent. Le modèle continu de plasticité s'avère capable de prévoir le comportement multiaxial d'une mousse, ce qui a été mis en évidence par la comparaison des champs de déformation expérimentaux et simulés autour d'un trou de 4 mm de diamètre. Toutefois, l'effet d'échelle observé sur des éprouvettes trouées a naturellement imposé les limites de la modélisation classique. Cet effet peut cependant être pris en compte en ajoutant un paramètre supplémentaire : une longueur interne. Les champs de déformation obtenus pour des trous de 1 et 4 mm de rayon avec une longueur caractéristique de 0,06 mm illustrent ce propos. De plus, le modèle micromorphe s'est illustré par le fait que l'épaisseur de la zone endommagée peut être décrite lors de la propagation d'une fissure. Dans le souci de valider complètement le modèle, vérifier les champs de déformation autour d'une fissure suivant différentes inclinaisons serait intéressant. En résumé de cette partie consacrée à la modélisation, les différentes approches utilisées ont prouvé que le comportement mécanique de la mousse pouvait être prévu dans une large mesure.

Ce travail s'inscrit comme une contribution à la compréhension et à la modélisation des mécanismes de déformation et de ruine des mousses de nickel à cellules ouvertes. Plusieurs techniques expérimentales

et différentes approches ont été employées. A ce stade des recherches entreprises, une discussion sur l'utilisation et les résultats obtenus avec cette large gamme de techniques et de méthodes s'impose.

Tout d'abord, le choix des moyens expérimentaux à mettre en œuvre pour observer un matériau cellulaire doit constituer la première interrogation. L'étude d'une structure tridimensionnelle nécessite-t-elle toujours l'emploi d'une technique tridimensionnelle ? La réponse adoptée ici s'est appuyée sur un mélange de techniques bidimensionnelles et tridimensionnelles. En effet, les techniques bidimensionnelles ne possèdent pas toutes les informations mais demeurent beaucoup plus faciles à appliquer. Par exemple, dans le cas de l'étude des mécanismes de déformation et d'endommagement, la plupart des phénomènes sont observables au MEB (localisation de la rupture aux nœuds, existence de ligaments, taille de la zone endommagée). Le MEB ne donne néanmoins aucun élément de réponse quantitatif concernant les mécanismes dans le volume de l'échantillon, et ne permet pas d'accéder à la morphologie de la mousse. De plus, avec la détection du moment et de l'emplacement de l'amorçage des fissures, la tomographie aux rayons X s'est avérée être une technique parfaitement adaptée à l'observation des mécanismes de déformation et de ruine.
Un autre exemple porte sur les essais de corrélation d'images numériques. Même si les mousses présentent naturellement une large gamme de niveaux de gris, leur structure tridimensionnelle n'est a priori pas adaptée à des essais de corrélation bidimensionnelle. Or, d'après les tests de validation de la mesure (voir Annexe F), l'effet de la composante hors-plan sur le champ de déformation de la mousse semble limité. De plus, la connaissance de cette composante n'est pas utile car l'échelle d'observation souhaitée se situe au niveau d'un petit groupe de cellules. Une corrélation d'images bidimensionnelle est donc suffisante pour obtenir une vision continue de la surface de la mousse, pour les sollicitations considérées dans ce travail.

L'utilisation de modèles différents suivant la situation, soulève la question de la nécessité de tout connaître. Trois approches différentes ont été traitées dans cette thèse. La première, qui consiste à modéliser le comportement de la mousse à partir de son réseau de poutres "réel" semble la plus complète. Elle prend en effet en compte l'architecture de la mousse (forme des cellules, longueur des brins ...), sa densité relative, son anisotropie géométrique et ses mécanismes de déformation (flexion, étirement). Cependant, cette modélisation coûteuse en temps est assez difficile à mettre en place, d'autant que le modèle discret n'est pas adapté au calcul de structures complexes faites en mousse pour des applications industrielles. Une modélisation simplifiée a alors été développée, qui repose aussi sur un réseau de poutres dont l'agencement n'est pas connu a priori. Ce modèle discret prend en compte la densité relative, l'anisotropie géométrique ainsi que la flexion (comme mécanisme de déformation), et l'écrouissage. Il présente l'avantage d'être facile à mettre en œuvre, mais se limite à la modélisation du comportement uniaxial. La troisième approche permet donc de modéliser le comportement multiaxial des mousses, par le biais d'un modèle continu de plasticité. Cependant, cette modélisation ne considère que l'écrouissage, l'anisotropie et la compressibilité de la mousse. Cette dernière démarche a toutefois l'avantage d'être continue et permet ainsi le calcul de structures. D'après l'étude des caractéristiques des trois modèles, l'approche complète, à partir de la microstructure de la mousse, n'apparaît pas comme la solution évidente résolvant tous les problèmes. Un choix plus judicieux doit donc être fait suivant le type d'information recherchée.

Les perspectives de ce travail sont multiples. Dans un premier temps, les calculs sur le réseau de poutres issu de la tomographie aux rayons X, doivent être poursuivis. Les premiers calculs, réalisés par Fazékas (Fazékas, 2003) en élasticité, donnent des résultats encourageants. L'anisotropie des propriétés élastiques simulées est en accord avec celle détectée expérimentalement. Réaliser ce calcul en élastoplasticité et comparer le comportement global simulé avec celui obtenu expérimentalement pour la mousse serait alors intéressant. Une fois l'étude du comportement en traction validée, un critère de rupture pourrait être introduit et la modélisation du comportement en compression pourrait être envisagée.

Une deuxième perspective est d'utiliser les graphes de la mousse, obtenus pour les différents stades de déformation. En effet, pour chaque état de déformation, les coordonnées des nœuds de la mousse sont connues. Cette donnée rend donc possible, entre deux états de déformation, la détermination du champ de déplacement de tous les nœuds ainsi que la déduction du champ de déformation associé, à trois dimensions. Le champ de déformation tridimensionnel peut alors être comparé à celui obtenu à partir d'un calcul par éléments finis sur le réseau de poutres initial. En outre, l'obtention du champ de déformation tridimensionnelle associé à la structure cellulaire de la mousse permet de valider l'hypothèse faite sur l'origine des hétérogénéités de déformation. Vérifier, sur les champs de déformation tridimensionnelle, si les bandes de déformation sont localisées aux endroits constitués de cellules complètes dans l'épaisseur, s'avère en effet plus aisé.

Des développements peuvent aussi être apportés au modèle de rupture employé. En effet, l'approche non locale ouvre des perspectives encourageantes. La prédiction du modèle au moyen d'un critère en déformation plastique critique a permis de simuler correctement l'épaisseur de la zone endommagée et de rendre compte qualitativement de l'anisotropie de la ductilité de la mousse. Cependant, un modèle micromécanique de rupture ductile des mousses, fondé sur les mécanismes d'endommagement identifiés dans la partie A, est à envisager.

Une autre perspective provient du modèle uniaxial à deux phases. Ce modèle ouvre des voies très prometteuses vers de nouveaux matériaux et de nouvelles applications. Comme expliqué au paragraphe 1., les mousses de nickel souffrent de leur manque de diversification. Leur utilisation est principalement réduite à l'application batteries rechargeables. De nouveaux débouchés, comme les filtres à particules ou les piles à combustible, sont aujourd'hui à l'étude. Malheureusement, l'emploi de mousses de nickel "brutes" reste impossible compte tenu des températures de fonctionnement. L'utilisation de mousses de nickel revêtues pour limiter l'oxydation semble en revanche tout à fait envisageable. Le modèle à deux phases proposé ici permet de prévoir le comportement de ces mousses revêtues, ce qui peut le placer comme outil servant à la caractérisation mécanique de ces nouveaux types de mousses. En premier lieu, l'étude du comportement d'une mousse de nickel revêtue d'aluminium peut s'avérer particulièrement intéressant. Cette expérience facile à mettre en œuvre constituerait un bon test pour le modèle puisque la couche externe ne possède pas un comportement fragile.

# Bibliographie


Andrews E.W. et Gibson L.J. (2001). *The influence of cracks, notches and holes on the tensile strength of cellular solids.* Acta Materialia, vol. 49, pp 2975–2979.

Andrews E., Sanders W., et Gibson L.J. (1999). *Compressive and tensile behaviour of aluminum foams.* Materials Science and Engineering A, vol. A270, pp 113–124.

Aste T., Boose D., et Rivier N. (1996). *From one cell to the whole froth : a dynamical map.* Physical Review E, vol. 53 n° 6, pp 6181–6191.

Attix F.H.R. et Roesch W.C. (1968). *Radiation Dosimetry.* Academic Press.

Badiche X., Bienvenu Y., Croset M., Forest S., Bartout J.-D., et Ienny P. (1999). *La mousse de nickel : comportement électrique et mécanique.* Rapport de stage, Centre des Matériaux – Ecole des Mines de Paris, Evry. Ingénieur troisième année.

Badiche X., Forest S., Guibert T., Bienvenu Y., Bartout J.-D., Ienny P., Croset M., et Bernet H. (2000). *Mechanical properties and non–homogeneous deformation of open–cell nickel foams : application of the mechanics of cellular solids and of porous materials.* Materials Science and Engineering A, vol. A289, pp 276–288.

Barma P., Rhodes M.B., et Salovey R. (1978). *Mechanical properties of particulate–filled polyurethane foams.* Journal of Applied Physics, vol. 49 n° 10, pp 4985–4991.

Bart-Smith H., Bastawros A.-F., Mumm D.R., Evans A.G., Sypeck D.J., et Wadley H.N.G. (1998). *Compressive deformation and yielding mechanisms in cellular Al alloys determined using X–ray tomography and surface strain mapping.* Acta Materialia, vol. 46, pp 3583–3592.

Bartout J.-D. (2002). *Réalisation de milieux filtrants pour particules émises par les moteurs à combustion interne à partir de supports métalliques – Etude de faisabilité.* Rapport de stage, Centre des Matériaux – Ecole des Mines de Paris, Evry. DESS Matériaux Avancés et Management.

Baruchel J., Buffière J.-Y., Maire E., Merle P., et Peix G. (2000). *X–ray Tomography in Material Science.* Hermès.

Bastawros A.-F., Bart-Smith H., et Evans A.G. (2000). *Experimental analysis of deformation mechanisms in a closed-cell aluminum alloy foam.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 48, pp 301–322.

Benouali A.-H. et Froyen L. (2001). *On the mechanical and microstructural characterisation of aluminium foams.* In : Cellular Metals and Metal Foaming Technology, éds. Banhart J., Ashby M.F., et Fleck N.A., pp 269–272. Verlag MIT Publishing.

Berenstein C. (2001). *Local Tomography and Related Problems.* Contemporary Mathematics, vol. 278, pp 3–14.

Bernard O., Amiri G., Haut C., Feltz B., Huntz A.M., et Andrieux M. (2002). *Mechanical and microstructural characterisation of oxide films damage.* Materials Science and Engineering A, vol. A335, pp 32–42.

Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.-L., et Forest S. (2001). *Mécanique non linéaire des matériaux.* 445 p., Hermès, France.

Blazy J.-S. (2003). *Comportement mécanique des mousses d'aluminium : caractérisations expérimentales sous sollicitations complexes et simulations numériques dans le cadre de l'élasto–plasticité compressible.* Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Mines de Paris.

Borst R. de, Sluys L.J., Mühlhaus H.B., et Pamin J. (1993). *Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation.* Engineering Computations, vol. 10, pp 99–121.

Bouchet S. (Juin 1999). *Segmentation et quantification d'images tridimensionnelles.* Rapport de stage, Centre de Morphologie Mathématique – Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau. Ingénieur troisième année.

Boudes M. (2001). *Etude des caractéristiques mécaniques entre juillet 2000 et juin 2001.* Note d'information, NiTECH, St Chamond.

Bourgin C., Croset M., et Forest S. (1997). *Etude et modélisation du comportement mécanique des mousses de nickel.* Rapport de stage, Centre des Matériaux – Ecole des Mines de Paris, Evry. Travail d'Option.

Chan K.C. et Xie L.S. (2003). *Dependency of densification properties on cell topology of metal foams.* Scripta Materialia, vol. 48, pp 1147–1152.

Chan R. et Nakamura M. (1969). *Mechanical properties of plastic foams.* Journal of Cellular Plastics, vol. 5, pp 112–118.

Chastel Y., Hudry E., Forest S., et Peytour-Chansac C. (1999). *Mechanical behaviour of aluminium foams for various deformation paths : Experiments and modelling.* In : Metal Foam and Porous Metal Structures, éds. Banhart J., Ashby M.F., et Fleck N.A., pp 263–268. Verlag MIT Publishing.

Cheng Z.-Q. et He L.-H. (1995). *Micropolar elastic fields due to a spherical inclusion.* International Journal of Engineering Science, vol. 33, pp 389–397.

Cheng Z.-Q. et He L.-H. (1997). *Micropolar elastic fields due to a circular cylindrical inclusion.* International Journal of Engineering Science, vol. 35, pp 659–668.

Choi J.B. et Lakes R.S. (1995). *Analysis of elastic modulus of conventional foams and of re–entrant foam materials with a negative Poisson's ratio.* International Journal of Mechanical Sciences, vol. 37 n° 1, pp 51–59.

Coster M. et Chermant J.P. (1985). *Précis d'analyse d'images.* Ed CNRS.

Dannemann K.A. et Lankford J.Jr (2000). *High strain rate compression of closed–cell aluminium foams.* Materials Science and Engineering A, vol. A293, pp 157–164.

Deshpande V.S., Ashby M.F., et Fleck N.A. (2001). *Foam topology bending versus stretching dominated architectures.* Acta Materialia, vol. 49, pp 1035–1040.

Deshpande V.S. et Fleck N.A. (2000a). *High strain rate compressive behaviour of aluminium alloy foams.* International Journal of Impact Engineering, vol. 24, pp 277–298.

Deshpande V.S. et Fleck N.A. (2000b). *Isotropic constitutive models for metallic foams.* Journal of Mechanics and Physics of Solids, vol. 48, pp 1253–1283.

Diebels S. et Steeb H. (2003). *Stress and couple stress in foams.* Computational Materials Science, vol. 28, pp 714–722.

Dillard T., Bartout J.-D., Forest S., Bienvenu Y., et Croset M. (Décembre 2002). *Programme MONICKE – Mousses de nickel ductile pour batteries rechargeables.* Rapport d'avancement, Centre des Matériaux – Ecole des Mines de Paris. N° 1154/MPE/4-5.

Dillard T., N'Guyen F., Forest S., Bienvenu Y., Bartout J.-D., Salvo L., Dendievel R., Maire E., Cloetens P., et Lantuéjoul C. (2003). *In-situ observation of tensile deformation of open-cell nickel foams by means of X-ray microtomography.* In : Cellular Metals and Metal Foaming Technology, éds. Banhart J., Ashby M.F., et Fleck N.A., pp 301–306. Verlag MIT Publishing.

Doumalin P. (2000). *Microextensométrie locale par corrélation d'images numériques – Application aux études micromécaniques par microscopie électronique à balayage.* Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique.

Doumalin P., Bornert M., et Crépin J. (2003). *Caractérisation de la répartition de la déformation dans les matériaux hétérogènes.* Mécanique et Industries, vol. 4, pp 607–617.

Elliott J.A., Windle A.H., Hobdell J.R., Eeckhaut G., Oldman R.J., Ludwig W., Boller E., Cloetens P., et Baruchel J. (2002). *In–situ deformation of an open-cell flexible polyurethane foam characterised by 3D computed microtomography.* Journal of Materials Science, vol. 37, pp 1547–1555.

Elmoutaouakkil A., Salvo L., Maire E., et Peix G. (2001). *2D and 3D characterisation of metal foams using X–ray tomography.* In : Cellular Metals and Metal Foaming Technology, éds. Banhart J., Ashby M.F., et Fleck N.A., pp 245–250. Verlag MIT Publishing.

Faridani A., Buglione K., Huabsomboon P., Iancu O.D., et Mc Grath J. (2001). *Introduction to Local Tomography.* Contemporary Mathematics, vol. 278, pp 29–47.

Fauvarque J.-F. (2001). *L'Université de tous les savoirs - Qu'est ce que les technologies ? Tome 5. Les batteries et les piles dans un environnement durable.* Editions Odile Jacob.

Fazékas A. (2003). *Etude de l'influence des dispersions microstructurales sur les propriétés effectives des matériaux cellulaires.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.

Fazékas A., Dendievel R., Salvo L., et Bréchet Y. (2002). *Effect of microstructural topology upon the stiffness and strength of 2D cellular structures.* International Journal of Mechanical Sciences, vol. 44, pp 2047–2066.

Feng Yi, Zhengang Zhu, Fangqiou Zu, Shisheng Hu, et Pan Yi (2001). *Strain rate effects on the compressive property and the energy–absorbing capacity of aluminum alloy foams.* Materials Characterization, vol. 47, pp 417–422.

Fleck N.A., Olurin O.B., Chen C., et Ashby M.F. (2001). *The effect of hole size upon the strength of metallic and polymeric foams.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 49, pp 2015–2030.

Forest S. et Sievert R. (2003). *Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua.* Acta Mechanica, vol. 160, pp 71–111.

Geers M.G.D., Borst R. de, Brekelmans W.A.M, et Peerlings R.H.J. (1998). *On the use of local strain fields for the determination of the intrinsic length scale.* Journal de Physique IV, vol. 8, pp Pr8–167–174.

Gent A.N. et Thomas A.G. (1959). *The deformation of foamed elastic materials.* Journal of Applied Polymer Science, vol. 1, pp 107–113.

Gibson L.J. (2000). *Mechanical behavior of metallic foams.* Annual Reviews of Material Sciences, vol. 30, pp 191–227.

Gibson L.J. et Ashby M.F. (Cambridge, 1997). *Cellular Solids. Structure and properties – Second edition.* Cambridge Solid State Science Series.

Goussery V. (2004). *Caractérisations microstructurale et mécanique de mousses de nickel à cellules ouvertes pour batteries de véhicules hybrides.* Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Mines de Paris.

Grenestedt J.L. (1999). *Effective elastic behavior of some models for "perfect"cellular solids.* International Journal of Solids and Structures, vol. 36, pp 1471–1501.

Grimaud M. (1991). *La géodésie numérique en morphologie mathématique. Application à la détection automatique de microcalcifications en mammographie numérique.* Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Mines de Paris.

Helfen L., Baumbach T., Stanzick H., Banhart J., Elmoutaouakkil A., Cloetens P., et Schladitz K. (2001). *Viewing the early stage of foam formation by high–resolution computed tomography.* In : Cellular Metals and Metal Foaming Technology, éds. Banhart J., Ashby M.F., et Fleck N.A., pp 239–244. Verlag MIT Publishing.

Hild F., Périé J.-N., et Coret M. (1999). *Mesure de champs de déplacements 2D par corrélation d'images numériques : CORRELI$^{2D}$.* Rapport interne n° 230, LMT, Cachan.

Jasiunienë E., Goebbels J., Illerhaus B., Löwe P., et Kottar A. (2001). *3D investigation of strength tested metallic foams by micro–tomography.* In : Cellular Metals and Metal Foaming Technology, éds. Banhart J., Ashby M.F., et Fleck N.A., pp 251–254. Verlag MIT Publishing.

Kim B.S. et Eringen A.C. (1973). *Stress distribution around an elliptic hole in an infinite micropolar elastic plate.* Letters in Applied and Engineering Sciences, vol. 1, pp 381–390.

Ko W.L. (1965). *Deformations of foamed elastomers.* Journal of Cellular Plastics, vol. 1 n° 1, pp 45–50.

Koza E., Leonowicz M., Wojciechowski S., et Simancik F. (2004). *Compressive strength of aluminium foams.* Materials Letters, vol. 58 n° 1-2, pp 132–135.

Kraynik A.M., Reinelt D.A., et Van Swol F. (2003). *Structure of random monodisperse foam.* Physical Review E, vol. 67 n° 031403, pp 1–11.

Kumar K.S., Suresh S., Chisholm M.F., Horton J.A., et Wang P. (2003). *Deformation of electrodeposited nanocrystalline nickel.* Acta Materialia, vol. 51, pp 387–405.

Kusner R. et Sullivan J.M. (1996). *Comparing the Weaire–Phelan equal–volume foam to Kelvin's foam.* Forma, vol. 11 n° 3, pp 233–242.

Kwon Y.W., Cooke R.E., et Park C. (2003). *Representative unit–cell models for open–cell metal foams with or without elastic filler.* Materials Science and Engineering A, vol. A343, pp 63–70.

Lantuéjoul C. et Maisonneuve F. (1984). *Geodesic methods in quantitative image analysis.* Pattern Recognition, vol. 17 n° 2, pp 177–187.

Laraba-Abbes F. (1998). *Etude des comportements hyperélastique et viscohyperélastique de deux élastomères de type NR et PDMS par extensométrie optique bidimensionnelle.* Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris.

Lederman J.M. (1971). *The prediction of the tensile properties of flexible foams.* Journal of Applied Polymer Science, vol. 15, pp 693–703.

Leitlmeier D. et Flankl H. (2001). *Properties of cellular aluminium produced by a new melt route foaming technique.* In : Cellular Metals and Metal Foaming Technology, éds. Banhart J., Ashby M.F., et Fleck N.A., pp 277–281. Verlag MIT Publishing.

Liu C., Huntz A.M., et Lebrun J.-L. (1993). *Origin and development of residual stresses in the Ni–NiO system : in–situ studies at high temperature by X–ray diffraction.* Materials Science and Engineering A, vol. A160, pp 113–126.

Liu Z., Chuah C.S.L., et M.G. Scanlon (2003). *Compressive elastic modulus and its relationship to the structure of a hydrated starch foam.* Acta Materialia, vol. 51, pp 365–371.

Lorensen W.E. et Clyne H.E. (1987). *Marching cubes : a high resolution 3D surface construction algorithm.* Computer Graphics, vol. 21 n° 4, pp 163–169.

Maire E., Babout L., Buffière J.-Y., et Fougères R. (2001). *Recent results on 3D characterisation of microstructure and damage of metal matrix composites and a metallic foam using X–ray tomography.* Materials Science and Engineering A, vol. A319-321, pp 216–219.

Maire E., Fazékas A., Salvo L., Dendievel R., Souhail Y., Cloetens P., et Letang J.M. (2003). *X–ray tomography applied to the characterization of cellular materials. Related finite element modeling problems.* Composites Science and Technology, vol. 63, pp 2431–2443.

Maisonneuve F. et Lantuéjoul C. (1984). *Geodesic convexity.* Acta Stereologica, vol. 3 n° 2, pp 169–174.

Matzke E.B. (1945). *The three–dimensional shape of bubbles in foam – an analysis of the rôle of surface forces in three–dimensional cell shape determination.* American Journal of Botany, vol. 33, pp 58–80.

Menges G. et Knipschild F. (1975). *Estimation of Mechanical Properties for Rigid Polyurethane Foams.* Polymer Engineering and Science, vol. 15 n° 8, pp 623–627.

Meyer F. et Beucher S. (1990). *Morphological Segmentation.* Journal of Visual Communication and Image Representation, vol. 1 n° 1, pp 21–46.

Mills N.J. et Gilchrist A. (2000). *High strain extension of open-cell foams.* Journal of Engineering Materials and Technology, vol. 122, pp 67–73.

Monnereau C. et Vignes-Adler M. (1998a). *Dynamics of 3D real foam coarsening.* Physical Review Letters, vol. 80 n° 23, pp 5228–5231.

Monnereau C. et Vignes-Adler M. (1998b). *Optical Tomography of Real Three-Dimensional Foams.* Journal of Colloid and Interface Science, vol. 202, pp 45–53.

Müller B., Beckmann F., Huser M., Maspero F., Székely G., Ruffieux K., Thurner P., et Wintermantel E. (2002). *Non–destructive three–dimensional evaluation of a polymer sponge by micro–tomography using synchrotron radiation.* Biomolecular Engineering, vol. 19, pp 73–78.

Nieh T.G., Higashi K., et Wadsworth J. (2000). *Effect of cell morphology on the compressive properties of open–cell aluminium foams.* Materials Science and Engineering A, vol. A283, pp 105–110.

Nieh T.G., Kinney J.H., Wadsworth J., et Ladd A.J.C. (1998). *Morphology and elastic properties of aluminium foams produced by a casting technique.* Scripta Materialia, vol. 38 n° 10, pp 1487–1494.

Olurin O.B., Arnold M., Körner C., et Singer R.F. (2002). *The investigation of morphometric parameters of aluminium foams using micro–computed tomography.* Materials Science and Engineering A, vol. A328, pp 334–343.

Onck P.R. et Bastawros A.-F. (2000). *Notch effects in metal foams.* In : Advances in mechanical behaviour, plasticity and damage, volume 1 – Euromat 2000, éds. Miannay D., Costa P., François D., et Pineau A., pp 717–722. Elsevier.

Patel M.R. et Finnie I. (1970). *Structural features and mechanical properties of rigid cellular plastics.* Journal of Materials, vol. 5 n° 4, pp 909–932.

Peerlings R.H.J., Geers M.G.D., Borst R. de, et Brekelmans W.A.M. (2001). *A critical comparison of nonlocal and gradient–enhanced softening continua.* Int. J. Solids Structures, vol. 38, pp 7723–7746.

Pillot C. (2003). *The world wide rechargeable battery market : to drop or to fly ?* Conférence orale.

Plateau J.A.F. (1873). *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires.* Gauthier–Villard – Paris.

Roberts A.P. et Garboczi E.J. (2001). *Elastic moduli of model random three–dimensional closed–cell cellular solids.* Acta Materialia, vol. 49, pp 189–197.

Roberts A.P. et Garboczi E.J. (2002). *Elastic properties of model random three–dimensional open–cell solids.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 50, pp 33–55.

Robertson I.M. et Birnbaum H.K. (1986). *An HVEM study of hydrogen effects on the deformation and fracture of nickel.* Acta metallurgica, vol. 34 n° 3, pp 353–366.

Ruan D., Lu G., Chen F.L., et Siores E. (2002). *Compressive behaviour of aluminium foams at low and medium strain rates.* Composite Structures, vol. 57, pp 331–336.

San Marchi C. et Mortensen A. (2001). *Deformation of open–cell aluminum foam.* Acta Materialia, vol. 49, pp 3959–3969.

Serra J. (1988). *Image Analysis and Mathematical morphology, volume 2 : Theoretical advances.* Academic Press.

Shu J.Y. et Fleck N.A. (1999). *Strain gradient crystal plasticity : size–dependent deformation of bicrystals.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 47, pp 297–324.

Shulmeister V., Van der Burg M.W.D., Van der Giessen E., et Marissen R. (1998). *A numerical study of large deformations of low-density elastomeric open–cell foams.* Mechanics of Materials, vol. 30, pp 125–140.

Sugimura Y., Meyer J., He M.Y., Bart-Smith H., Grenstedt J., et Evans A.G. (1997). *On the mechanical performance of closed cell Al alloy foams.* Acta Materialia, vol. 45 n° 12, pp 5245–5259.

Thomson Sir William (1887). *On the division of space with minimum partitional area.* Acta Mathematica, vol. 11, pp 121–134.

Ulrich D., Van Rietbergen B., Weinans H., et Rüegsegger P. (1998). *Finite element analysis of trabecular bone structure : a comparison of image-based meshing techniques.* Journal of Biomechanics, vol. 31, pp 1187–1192.

WADLEY H.N.G. (2002). *Cellular Metals Manufacturing.* Advanced Engineering Materials, vol. 4 n° 10, pp 726–733.

WANG YU ET CUITIÑO A.M. (2002). *Full-field measurements of heterogeneous deformation patterns on polymeric foams using digital image correlation.* International Journal of Solids and Structures, vol. 39, pp 3777–3796.

WARREN W.E. ET KRAYNIK A.M. (1988). *The linear elastic properties of open–cell foams.* Journal of Applied Mechanics, vol. 55, pp 341–346.

WARREN W.E. ET KRAYNIK A.M. (1991). *The nonlinear elastic behavior of open–cell foams.* Journal of Applied Mechanics, vol. 58, pp 376–381.

WARREN W.E. ET KRAYNIK A.M. (1997). *Linear elastic behavior of a low–density Kelvin foam with open cells.* Journal of Applied Mechanics, vol. 64, pp 787–794.

WARREN W.E., KRAYNIK A.M., ET STONE C.M. (1989). *A constitutive model for two–dimensional nonlinear elastic foams.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 37 n° 6, pp 717–733.

WEAIRE D. ET HUTZLER S. (1999). *The Physics of Foams.* Clarendon Press – Oxford.

WEAIRE D. ET PHELAN R. (1994). *A counter–example to Kelvin's conjecture on minimal surfaces.* Philosophical Magazine Letters, vol. 69, pp 107–110.

WIENIN J.-S. (2001). *Comportement élastoplastique anisotrope de tôles minces destinées à l'emboutissage. Influence des données de compression large sur l'identification.* Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Mines de Paris.

WILLIAMS R.E. (1968). *Space–filling polyhedron : its relation to aggregates of soap bubbles, plant cells and metal crystallites.* Science, vol. 161, pp 276–277.

WRONSKI Z.S. (2001). *Materials for rechargeable batteries and clean hydrogen energy sources.* International Materials Reviews, vol. 46 n° 1, pp 1–49.

ZHU H.X., HOBDELL J.R., ET WINDLE A.H. (2000). *Effects of cell irregularity on the elastic properties of open–cell foams.* Acta Materialia, vol. 48, pp 4893–4900.

ZHU H.X., KNOTT J.F., ET MILLS N.J. (1997). *Analysis of the elastic properties of open–cell foams with tetrakaidecahedral cells.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 45 n° 3, pp 319–343.

# ANNEXES

# Annexe A

# European Synchrotron Radiation Facility (ESRF)

La partie A de cette thèse est fondée sur l'exploitation des images acquises sur la ligne ID19 à l'ESRF de Grenoble. Revenir sur le fonctionnement de cet outil d'exception semblait donc intéressant. Cette annexe résume le principe du rayonnement synchrotron, et permet ainsi de comprendre la façon dont s'insèrent les expériences menées sur les mousses de nickel.

## A.1 Présentation de l'ESRF

De part le monde, on compte une cinquantaine de synchrotrons. Les plus puissants sont : APS aux Etats-Unis, Spring-8 au Japon, et l'ESRF (voir figure A.1a). L'ESRF fait parti des synchrotrons de troisième génération (voir paragraphe A.3). Sa construction a débuté en 1988. Inauguré en 1994 en offrant 15 lignes opérationnelles, il en compte aujourd'hui plus de quarante (voir figure A.1b).

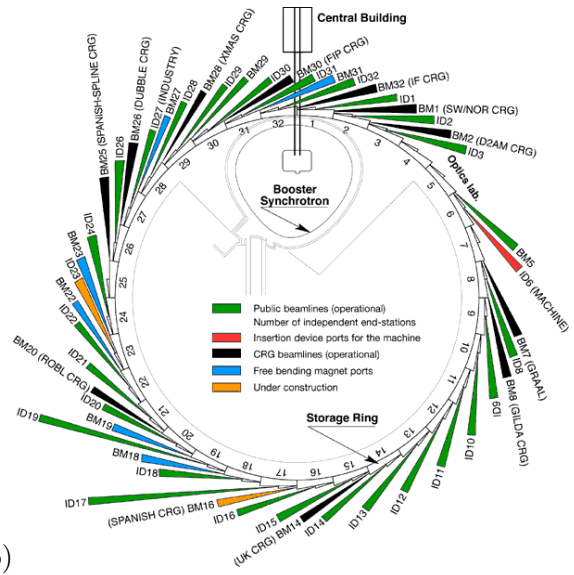
a) b) 


**Figure A.1** : ESRF de Grenoble : a) vue aérienne, b) schéma des lignes opérationnelles.

L'ESRF est financé par 17 pays européens. La contribution française, qui est la plus importante, représente 27,5 % du budget annuel (Allemagne : 25,5 %).

## A.2 Origine des rayons X

Les rayons X ont été découverts à la fin du XIX$^{e}$ siècle (1895) par G.C. Röntgen. Ne connaissant pas la nature de ces rayons mystérieux, capables de traverser le corps humain, Röntgen les a appelés "rayons X". Les rayons X sont des ondes électromagnétiques situées entre l'ultraviolet et les rayons gamma (voir figure A.2). Leurs longueurs d'ondes sont de l'ordre des distances interatomiques entre $10^{-8}$ et $10^{-12}$ m. Grâce à leur pouvoir de pénétration dans la matière et à leurs très courtes longueurs d'ondes, les rayons X sont couramment employés en physique afin d'analyser la matière au niveau atomique. Les techniques utilisées par les scientifiques sont principalement basées sur l'absorption ou la diffraction des rayons X. Dans le cas des essais de tomographie effectuée sur la ligne ID19, c'est le phénomène d'absorption des rayons X par la matière qui est mis à profit. Le synchrotron de Grenoble génère des rayons X en contraignant les électrons, de très haute énergie, à suivre une trajectoire courbe. Ces derniers émettent alors des ondes électromagnétiques appelées rayonnement synchrotron.

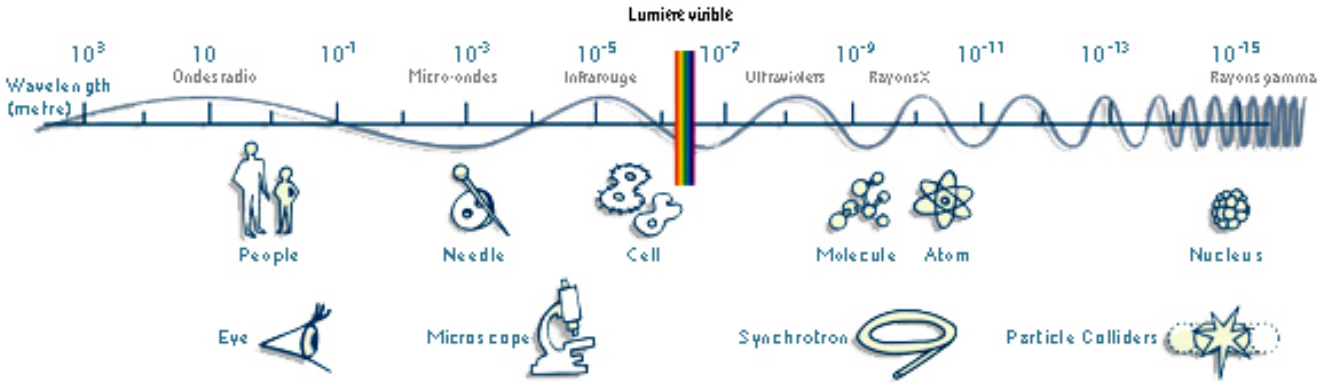



**Figure A.2** : Longueur d'ondes des rayons X.

## A.3 Principe du rayonnement synchrotron

Les électrons sont émis par un canon à électrons d'énergie 100 keV. Ils sont ensuite introduits dans un accélérateur linéaire (LINAC) pour les amener à une énergie de 400 MeV (voir figure A.3a). Puis, ces électrons sont transférés dans un accélérateur circulaire ("booster" synchrotron) de 300 m de circonférence où ils atteignent une énergie de 6 GeV. Ils sont finalement injectés dans l'anneau de stockage de 844 m de circonférence où ils circulent sous vide pendant des heures. Leur énergie est maintenue constante grâce à des cavités radiofréquences. C'est cet anneau de stockage qui alimente les lignes de lumière en rayonnement synchrotron.

La trajectoire des électrons est contrôlée par différents types d'aimants (voir figure A.3b) :

- les aimants de focalisation, qui assurent la faible dispersion du faisceau ;
- les aimants de courbure, qui courbent le faisceau pour lui faire décrire un cercle ;
- les "dispositifs d'insertion".

a) b)

**Figure A.3** : Parties constitutives : a) de l'ESRF, b) de l'anneau de stockage.

Les aimants de courbure (Bending Magnets - BM) et les "dispositifs d'insertion" (Insertion Device - ID) sont à l'origine du rayonnement synchrotron. Ils donnent leur nom à la ligne de lumière (voir figure A.1b). Le rayonnement synchrotron de la ligne ID19 est donc créé à l'aide des éléments d'insertion. L'ESRF est qualifié de synchrotron de troisième génération car son rayonnement n'est pas seulement dû aux aimants de courbure mais aussi aux éléments d'insertion.

Les aimants de courbure (au nombre de 64) sont positionnés à la jonction entre deux portions droites de l'anneau de stockage. A chaque passage dans un aimant de courbure, les électrons sont déviés de leur trajectoire rectiligne et émettent du rayonnement synchrotron qui peut être utilisé dans une ligne de lumière (BM). Le faisceau de photons résultant est donc une nappe correspondant à l'émission de rayonnement pour chaque position où il y a courbure de la trajectoire (voir figure A.4a).
Les éléments d'insertion sont, quant à eux, placés sur les sections droites entre deux aimants de courbure. Ils sont de deux types :

- les ondulateurs ;
- les wigglers.

Ces deux dispositifs sont constitués d'une série de petits aimants successifs à polarités inversées. Les champs magnétiques forcent les électrons à osciller autour de leur trajectoire rectiligne. Dans le cas des ondulateurs (voir figure A.4b), les électrons sont faiblement déviés. Les cônes de lumière émis à chaque courbure interfèrent entre eux. Les photons recueillis sur la ligne de lumière sont donc le résultat d'une interférence constructive. La brillance d'une telle source est donc extrêmement élevée, mais restreinte à certaines longueurs d'onde. Pour certaines longueurs d'onde, la brillance est renforcée d'un facteur 10000 environ par rapport aux aimants de courbure. Dans le cas des wigglers (voir figure A.4c), les électrons sont déviés plus fortement de telle manière que les paquets de photons émis n'interfèrent pas entre eux. Les intensités s'additionnent simplement. La brillance est moins élevée que pour un ondulateur, mais répartie de manière assez homogène en longueur d'onde. Sa répartition est comparable à celle des aimants de courbure. La source de rayonnement de la ligne de lumière ID19 utilise un wiggler comme "dispositif d'insertion".

## A.4 Ligne de lumière ID19

La ligne ID19 est destinée à l'imagerie aux rayons X. Pour cette raison, elle possède des caractéristiques légèrement différentes par rapport aux autres lignes. Afin de bénéficier d'un faisceau large et parallèle, la cabine expérimentale est située à 150 mètres de la source de rayons X. La ligne ID19 se trouve donc à l'extérieur de l'anneau de stockage (voir figure A.3a).

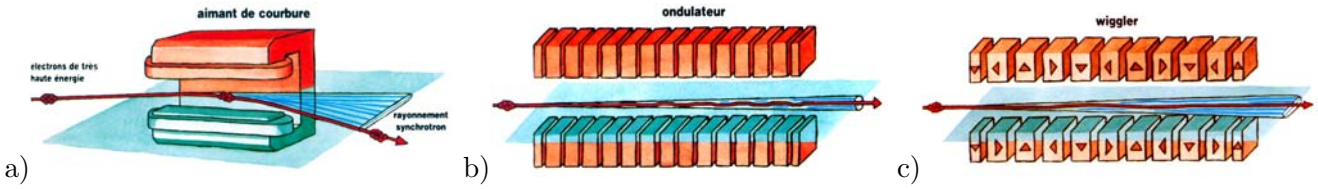



**Figure A.4** : Sources de rayonnement électromagnétique : a) aimant de courbure, b) ondulateur, c) wiggler.

La ligne ID19 est constituée de trois cabines bien distinctes :

- cabine optique ;
- cabine monochromateur ;
- cabine experimentale.

La cabine optique est située juste après la source (voir figure A.5). Elle sert à filtrer et à conditionner le faisceau. Elle comprend des instruments pour limiter le faisceau spatialement (diaphragmes, fentes primaires) et pour en diminuer son intensité (atténuateur). La cabane optique est séparée de la cabine monochromateur par un tube de 115 mètres de long ("long pipe") où règne un ultra-vide ($\sim 10^{-9}$ mbars). La cabane monochromateur est composée de fentes de collimation (fentes secondaires), d'atténuateur pour limiter la charge thermique sur l'échantillon, et d'un monochromateur. Le monochromateur est constitué de deux monocristaux de silicium. Il permet de réduire la dispersion en énergie des rayons X. Dans le prolongement de la cabine monochromateur se trouve la cabine expérimentale. C'est dans cette cabine que la machine de traction/compression et les échantillons de mousse ont été disposés. La cabine expérimentale comprend tous les systèmes de détection. La taille maximale de faisceau au niveau de l'échantillon est de 45 mm x 15 mm. Les expériences ont ensuite été dirigées à partir de la cabine de contrôle–commande. Afin de prévenir tous risques de mauvaise manipulation, des sécurités ont été installées. Trois volets permettent d'obturer le faisceau incident (voir figure A.5). Le premier volet (Front-End) est situé à l'intérieur de l'anneau. Le deuxième est positionné à la sortie de la cabine optique juste avant le tunnel. Enfin, le troisième (Variable Beam Shutter – VBS) est placé à la sortie de la cabine monochromateur juste avant la salle d'expérience. Ce volet est celui qui est le plus actionné pendant la campagne d'essais. Il permet de rentrer en toute sécurité dans la cabine expérimentale.

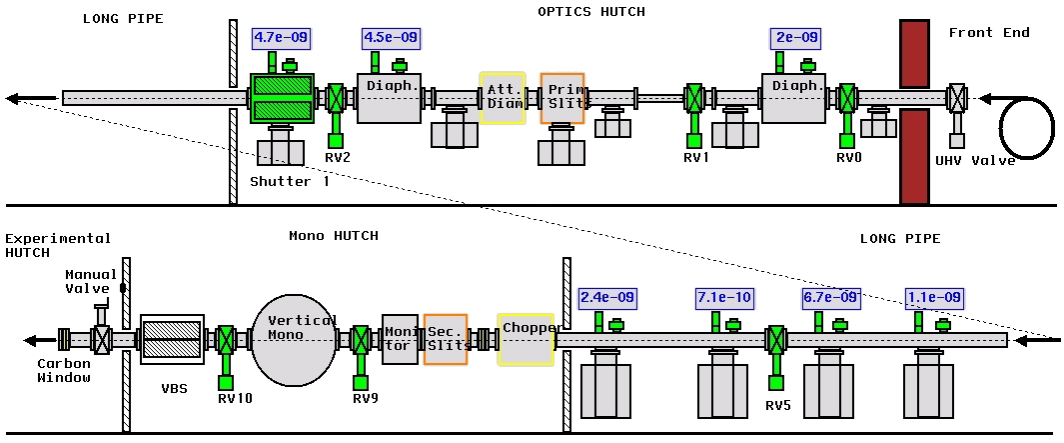
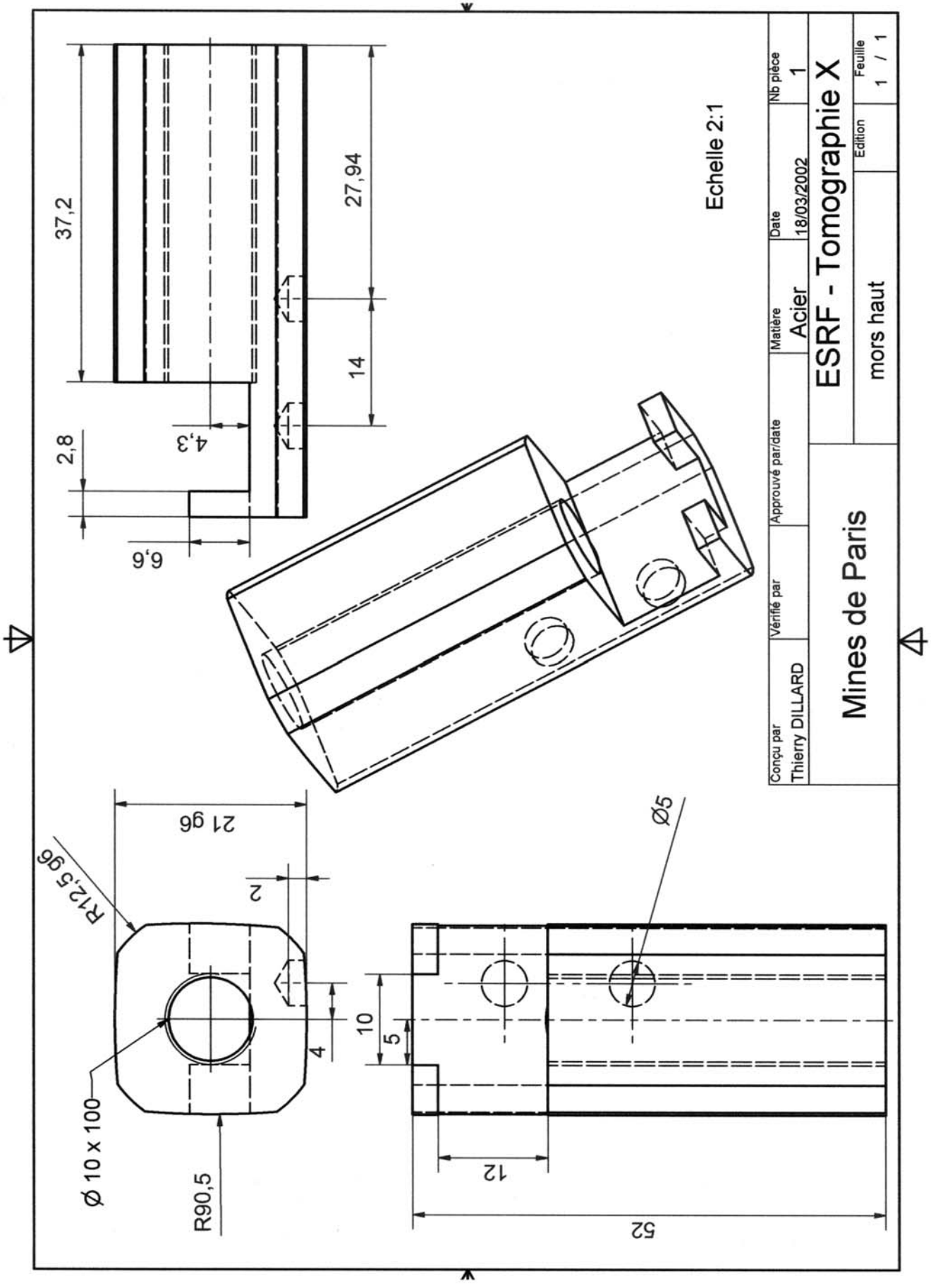


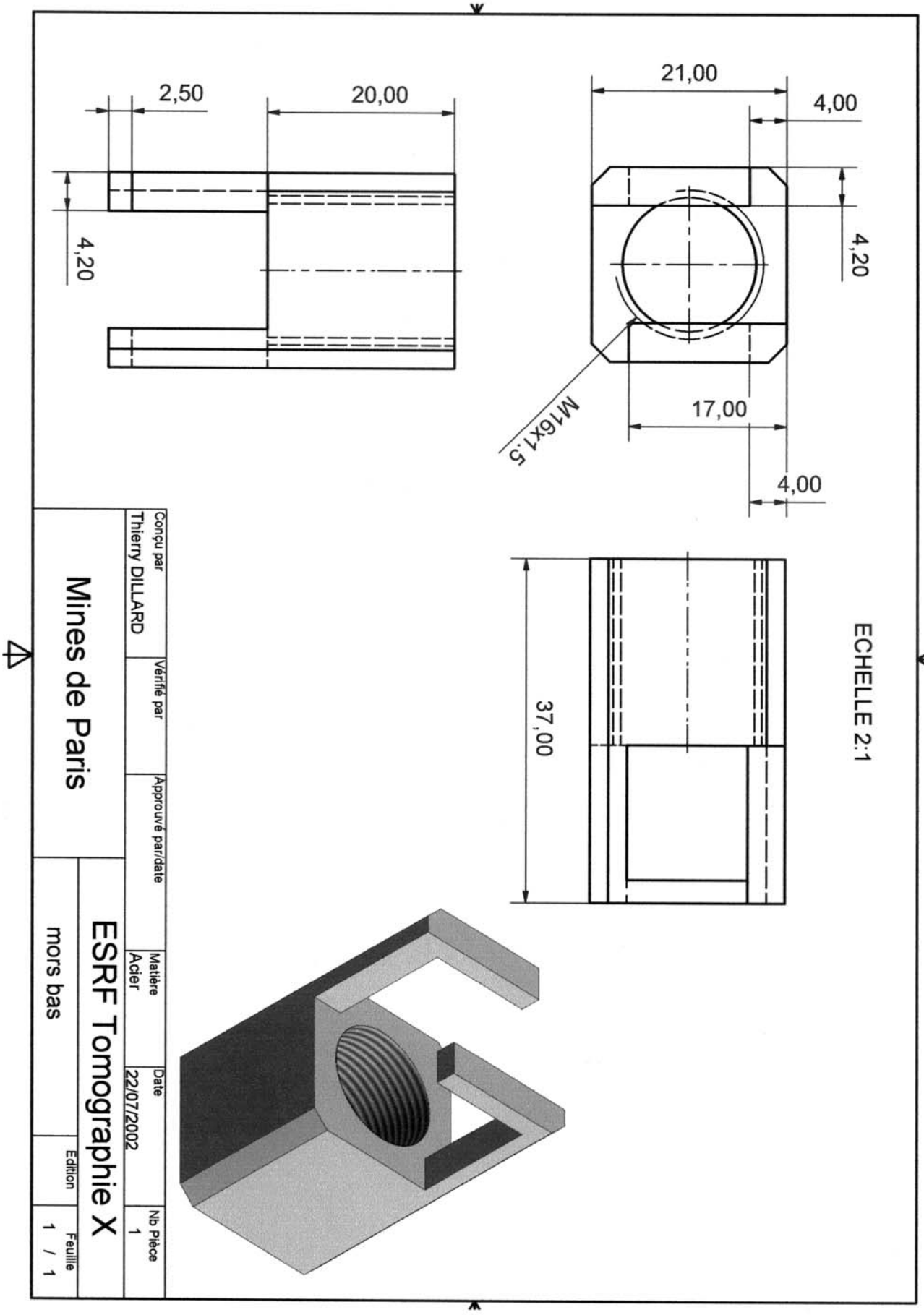

**Figure A.5** : Schéma de la ligne de lumière ID19.

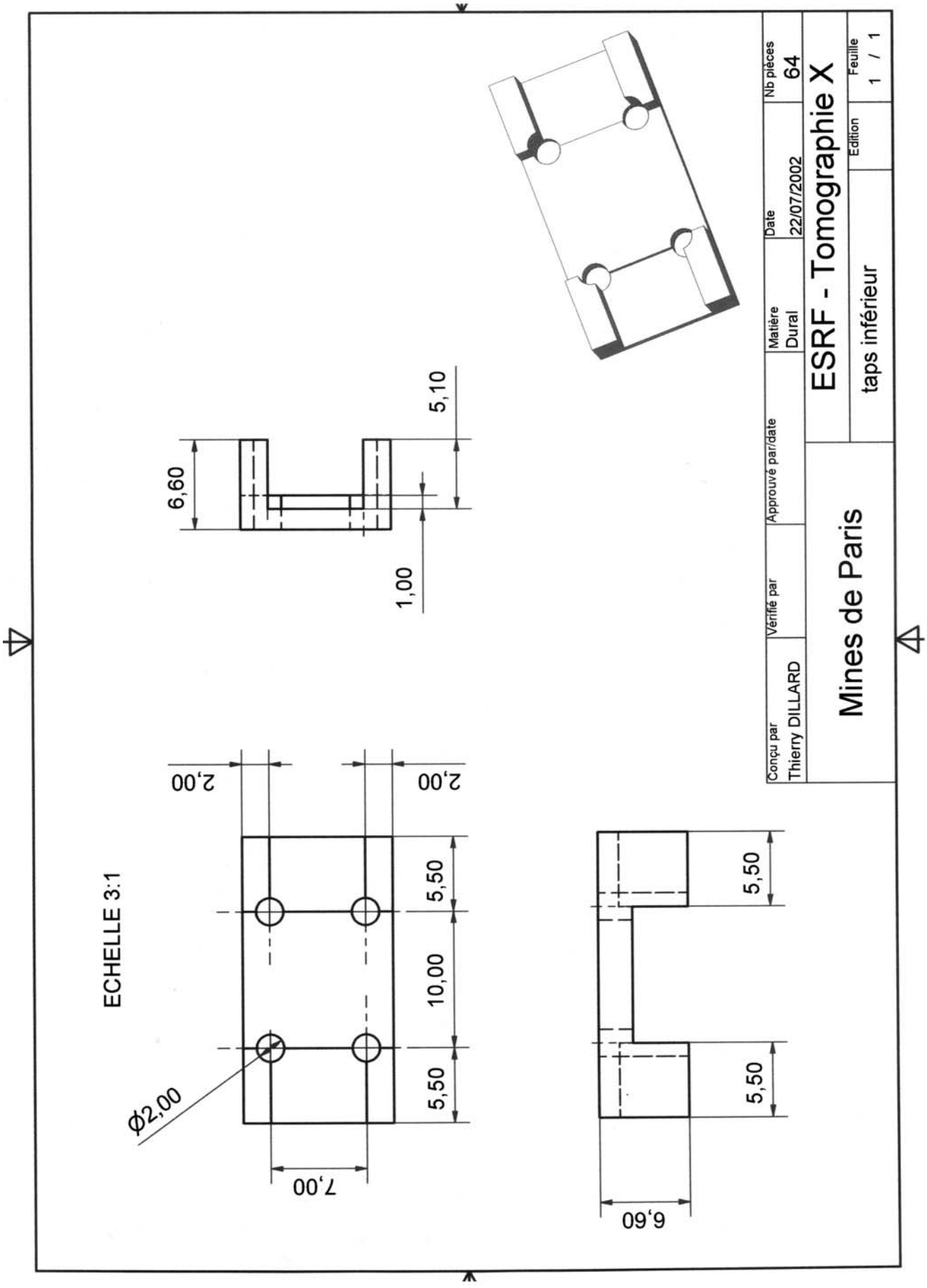
# Annexe B

# Plan du dispositif de traction in–situ pour les essais sous tomographie aux rayons X

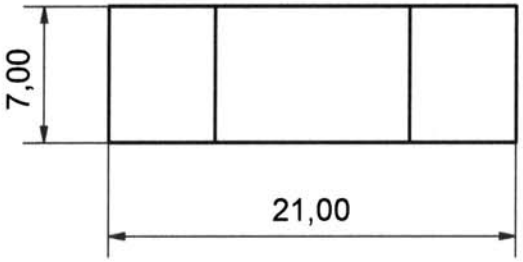
Dans cette annexe sont fournis les dessins des pièces réalisées spécialement pour les essais de traction sous un tomographe à rayons X. Ils concernent les mors du haut et du bas de la machine de traction, ainsi que les “taps” servant à aligner l’éprouvette.

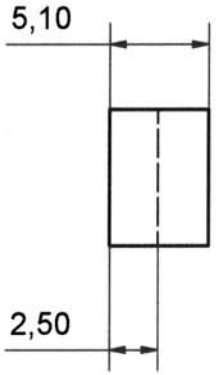

Echelle 2:1
37,2
27,94
14
4,3
2,8
6,6
21 g6
R12,5 g6
2
Ø 10 x 100
R90,5
4
10
5
12
52
Ø5
Conçu par
Thierry DILLARD
Vérifié par
Approuvé par/date
Matière
Acier
Date
18/03/2002
Nb pièce
1
ESRF - Tomographie X
Edition
Feuille
1 / 1
mors haut
Mines de Paris

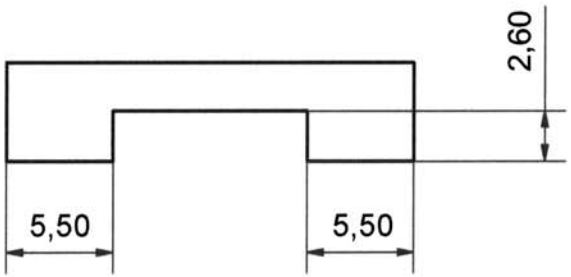

2,50
20,00
4,20
21,00
4,00
4,20
M16x1.5
17,00
4,00
37,00
ECHELLE 2:1
Mines de Paris
Conçu par
Thierry DILLARD
Vérifié par
Approuvé par/date
Matière
Acier
Date
22/07/2002
Nb Pièce
1
ESRF Tomographie X
mors bas
Edition
Feuille
1 / 1

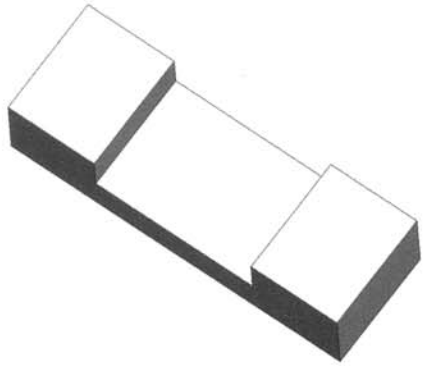

ECHELLE 3:1
Ø2,00
2,00
2,00
5,50
10,00
5,50
7,00
6,60
5,10
1,00
6,60
5,50
5,50
Conçu par
Thierry DILLARD
Vérifié par
Approuvé par/date
Mines de Paris
Matière
Dural
Date
22/07/2002
Nb pièces
64
ESRF - Tomographie X
taps inférieur
Edition
Feuille
1 / 1

ECHELLE 3:1



| Conçu par | Vérifié par | Approuvé par/date | Matière | Date | Nb pièces |
|---|---|---|---|---|---|
| Thierry DILLARD | | | Dural | 22/07/2002 | 64 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mines de Paris | ESRF - Tomographie X | | |
| | taps supérieur | Edition | Feuille 1 / 1 |

# Annexe C

# Vocabulaire propre à l'analyse d'images

Les principales notions et concepts d'analyse d'images (Coster et Chermant, 1985; Serra, 1988), utilisés tout au long de ce travail, sont expliqués dans cette annexe. Pour une meilleure compréhension, les explications sont données sur des exemples bidimensionnels. Toutefois, tous ces concepts sont généralisables en trois dimensions.

***Eléments structurants***

La morphologie mathématique ensembliste traite des images binaires. Elle utilise un ensemble $B$ de géométrie et de taille connues, appelé élément structurant. L'élément structurant choisi est déplacé de façon à ce que son centre passe par tous les pixels à analyser de l'image binaire. Il sert à réaliser des opérations morphologiques sur l'image comme l'érosion ou la dilatation. Les objets à analyser sont comparés à l'élément structurant (objet de forme connue).

Dans cette partie, les éléments structurants $\mathbb{1}$ et $\mathbb{1}'$ ont les expressions suivantes :

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{1}' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{C.1}$$

***Erosion***

L'érosion, symbolisée par $\ominus$, est un opérateur de base de la morphologie mathématique.
Soit un ensemble $X$, $B$ l'élément structurant et $Y$ l'ensemble $X$ érodé par l'élément structurant $B$.
L'opération d'érosion consiste à déplacer le centre de l'élément structurant sur chaque pixel de l'ensemble à éroder et à se poser la question suivante : "est-ce que l'élément structurant est complètement inclus dans l'ensemble X ?" L'ensemble des positions du centre de l'élément structurant $B$ répondant par l'affirmative à cette question forme un nouvel ensemble $Y$, érodé de $X$.
L'opération d'érosion s'écrit :

$$Y = X \ominus B \tag{C.2}$$

Les objets de taille inférieure à celle de l'élément structurant disparaissent et les autres objets sont "amputés" d'un morceau correspondant à la taille de l'élément structurant.
Un exemple d'érosion est donné sur la figure C.1a.

***Dilatation***

C'est l'opération duale de l'érosion. Elle est symbolisée par $\oplus$.

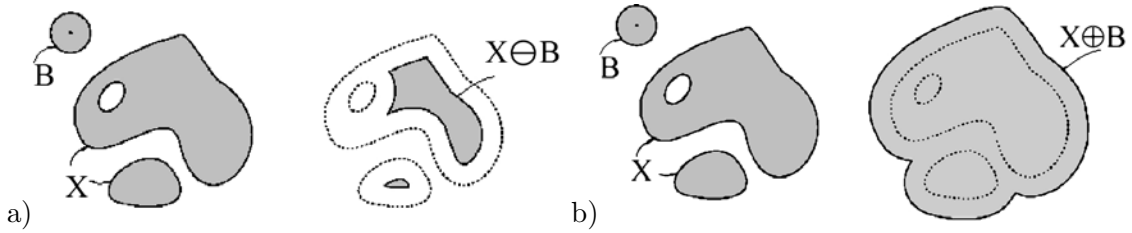



**Figure C.1** : Opérateur de base de la morphologie mathématique : a) érosion, b) dilatation.

Soit un ensemble $X$, $B$ l'élément structurant et $Y$ l'ensemble $X$ dilaté par l'élément structurant $B$.
La dilatation, consiste à déplacer le centre de l'élément structurant sur chaque pixel de l'ensemble $X$ et à se poser la question suivante : "est-ce que l'élément structurant touche l'ensemble $X$ ?" L'ensemble des points répondant positivement à cette question constitue le nouvel ensemble $Y$, dilaté de $X$.
L'opération de dilatation s'écrit :

$$Y = X \oplus B \tag{C.3}$$

Les objets situés à une distance inférieure à la taille de l'élément structurant fusionnent. Tous les objets de l'ensemble $X$ "grossissent" d'une partie correspondant à la taille de l'élément structurant.
Un exemple de dilatation est donné sur la figure C.1b.

***Ouverture***
L'érosion d'un ensemble $X$ par un élément structurant $B$, suivie d'une dilatation de l'ensemble érodé par le même élément structurant $B$ décrit une opération d'ouverture sur l'ensemble $X$.
Soit l'ensemble $Y$, l'ouvert de l'ensemble $X$.
Avec les conventions utilisées, l'opération d'ouverture s'écrit :

$$Y = (X \ominus B) \oplus B \tag{C.4}$$

L'ouverture a pour propriété d'éliminer toutes les parties des objets de l'ensemble $X$ qui ne peuvent pas contenir l'élément structurant $B$.

***Fermeture***
L'opération de fermeture sur l'ensemble $X$ est décrite par une dilatation de l'ensemble $X$ par un élément structurant $B$, suivie d'une érosion par le même élément structurant $B$.
Soit l'ensemble $Y$, le fermé de l'ensemble $X$.
Avec les conventions utilisées, l'opération de fermeture s'écrit :

$$Y = (X \oplus B) \ominus B \tag{C.5}$$

La fermeture a pour propriété de combler tout ce qui est de taille inférieure à l'élément structurant $B$.

***Gradient morphologique***
Le gradient morphologique de taille $n$ d'une image est obtenu par différence entre le dilaté de taille $n$ et l'érodé de taille $n$. Il permet ainsi d'obtenir une bonne approximation des contours des objets présents dans l'image initiale.

***Distance géodésique (Maisonneuve et Lantuéjoul, 1984)***
En morphologie mathématique, la notion de distance euclidienne est souvent remplacée par la distance géodésique qui tient compte des obstacles. La figure C.2 illustre ce propos.

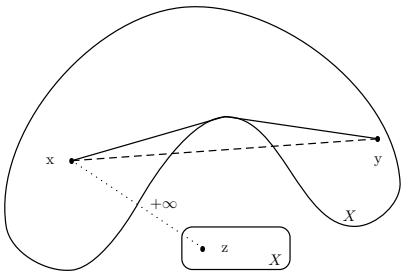



**Figure C.2** : Illustration du concept de distance géodésique : distance géodésique (traits pleins et petits points), distance euclidienne (traits pointillés).

Soit $X$ un ensemble de référence de $\mathbb{R}^3$.

La distance géodésique est définie comme la plus petite des longueurs des chemins, s'il en existe, allant de $x$ à $y$ et restant inclus dans $X$. Cette distance est tracée en trait plein sur le schéma de la figure C.2 alors que sa distance euclidienne est représentée en pointillés. S'il n'existe pas de chemin, comme c'est le cas entre $x$ et $z$, la distance géodésique est considérée comme infinie.

Il est à noter que la distance géodésique est obligatoirement supérieure ou égale à la distance euclidienne. De plus, elle n'est pas forcément unique comme la distance euclidienne.

A partir de cette distance, un ensemble de transformations géodésiques, comme l'érosion et la dilatation, sont facilement définissables.

***Fonction distance***

Si une distance est défini dans l'espace étudié, on peut associer à chaque ensemble $X$, le sous-ensemble $X_\lambda$ constitué des points qui sont à une distance supérieure à $\lambda$ de sa frontière. Quand $\lambda$ augmente, les sous-ensembles sont inclus les uns dans les autres. Ils peuvent alors être interprétés comme les sections horizontales d'une fonction valant $\lambda$ au point $x$ si le point $x$ est à une distance $\lambda$ de la frontière (voir Fig.C.3).

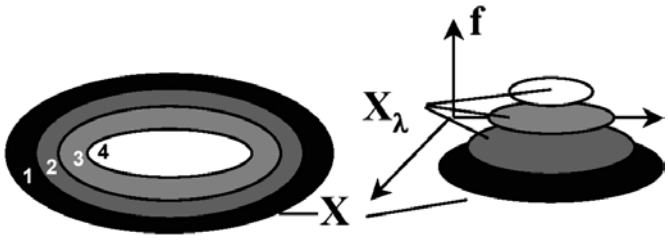



**Figure C.3** : Exemple de propagation de la fonction distance.

Si la distance est caractérisée par la famille de disques, les sous-ensembles $X_\lambda$ sont les résultats des érosions à l'aide de cette famille de disques. En associant un niveau de gris à chaque érosion, on obtient alors un histogramme en niveau de gris. La fonction distance fait donc la transition entre les ensembles (image binaire) et les fonctions (image en niveaux de gris).

La distance $d$ entre les points $x$ et $y$ de l'ensemble $X$ est défini par :

$$d\,(x,y) = Inf\{\lambda : x \in \delta_\lambda\,(y)\ ;\ y \in \delta_\lambda\,(x)\} \tag{C.6}$$

où $\delta_\lambda\,(y)$ représente la boule de centre $y$ et de rayon $\lambda$.

***Extraction des extrema d'une fonction***

Soit $f$ la fonction représentant la distribution des niveaux de gris de l'image.
On appelle maximum local (resp. minimum local), une zone connexe de même altitude n'ayant aucun voisin d'altitude supérieure (inférieure) dans un voisinage de 1.

Pour extraire les maxima locaux de la fonction $f$, on procède à la différence entre la fonction $f$ et le résultat de la reconstruction par dilatation géodésique $R_f$ de la fonction $(f-1)$ (Grimaud, 1991) (voir Fig.C.4).

$$max(f) = f - R_f(f-1) \tag{C.7}$$

Pour obtenir les minima locaux de la fonction $f$, on fait la différence entre le résultat de la reconstruction par érosion géodésique $R_f^*$ de la fonction $(f+1)$ et la fonction $f$

$$min(f) = R_f^*(f+1) - f \tag{C.8}$$

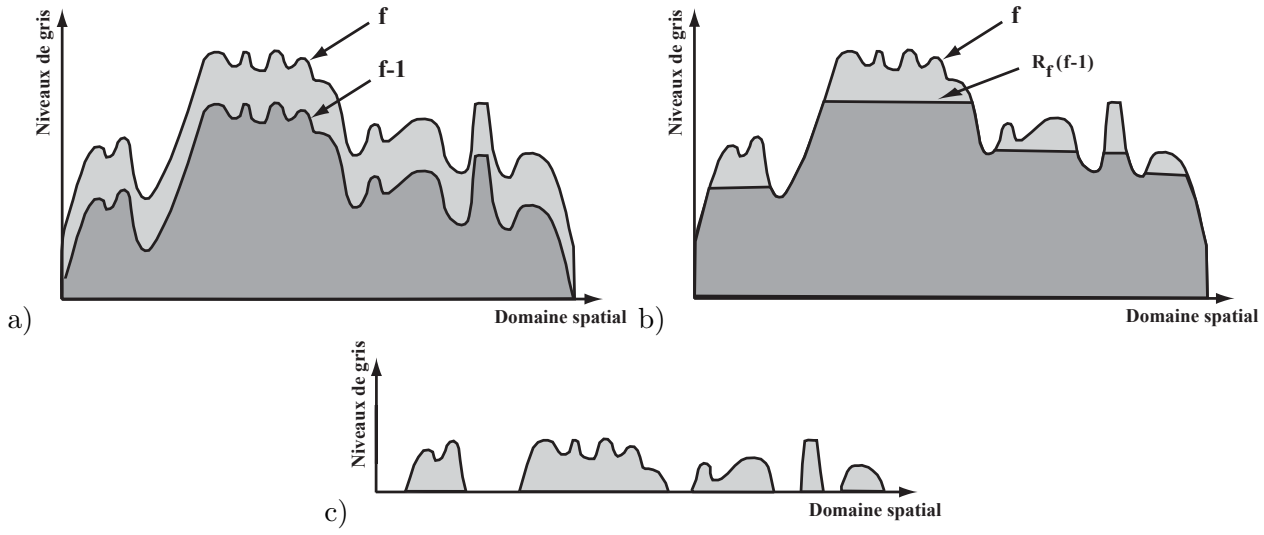



**Figure C.4** : Extraction des maxima de la fonction $f$ : a) soustraction de $(f-1)$, b) reconstruction par dilatation géodésique, c) sélection des maxima.

***Bassins versants***

La notion de bassins versants en analyse d'images est proche de celle issue de la géographie. En reprennant l'analogie entre l'image en niveaux de gris et un relief terrestre, un bassin versant correspond à l'ensemble des pentes inclinées vers un même cours d'eau, et y déversant leurs eaux de ruissellement. En d'autres termes, il correspond à l'espace géographique dans lequel toutes les eaux convergent vers le même minimum. Les différents bassins versants sont délimités par une ligne de partage des eaux ou ligne de crête des massifs bordant le bassin versant.

***Ligne de Partages des Eaux ("watershed")***

Il a été vu que l'analogie entre les niveaux de gris d'une image et les altitudes justifiait les termes de Ligne de Partage des Eaux (LPE) et de bassins versants. Cependant, dans le cadre de la LPE, il ne s'agit pas de ruissellement, mais du cas contraire où l'eau jaillit des minima (voir Fig.C.5a).

La ligne de partage des eaux par inondation est construite à partir des minima. La surface est inondée à partir de ces sources. Progressivement, le niveau de l'eau s'élève. Pour empêcher le mélange des eaux venant de minima différents, un barrage élémentaire en chaque point de contact est créé.

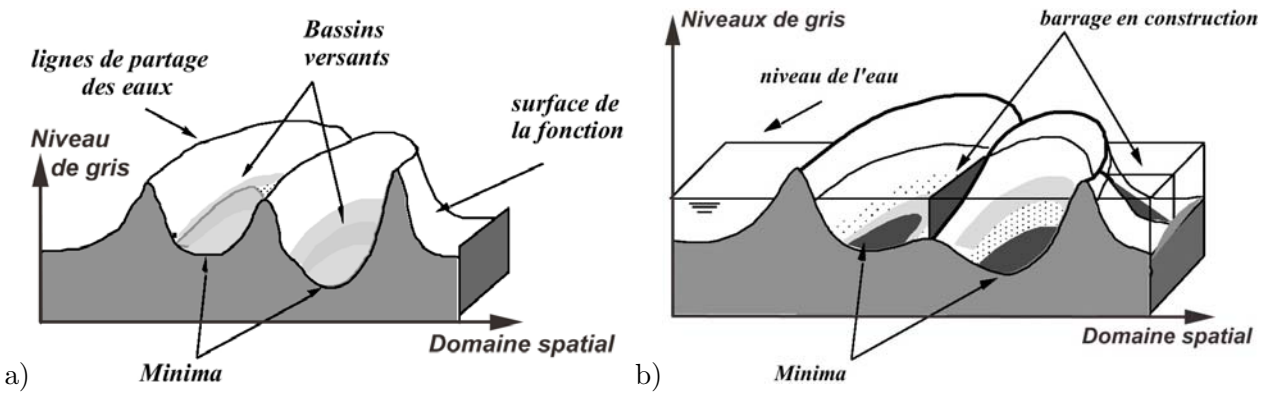



**Figure C.5** : Caractères topographiques d'une image numérique.

L'eau continue donc de s'élever jusqu'à ce qu'il ne reste que des digues entourées d'eau (voir Fig.C.5b). Les digues forment alors la ligne de partage des eaux.

*Remarque : la Ligne de Partage des Eaux devient la Surface de Partage des Eaux en 3D (SPE).*

# Annexe D

# Calcul de la surface réelle développée de la mousse

## D.1 Exploitation des résultats

Afin d'expliquer les résultats présentés dans le paragraphe II.3.2, le détail des calculs effectués est repris ci-dessous pour la mousse de nickel MN 110-042-16.

Pour cet essai, les propriétés mesurées pour l'échantillon de mousse MN 110-042-16 sont les suivantes :

$$\begin{array}{lcll} \textit{dimensions} & L \text{ x } l \text{ x } e & = & 60,2 \text{ x } 28,3 \text{ x } 1,6 \quad (\text{mm x mm x mm}) \\ \textit{masse initiale} & m_i^* & = & 722,9 \quad \text{mg} \\ \textit{masse finale} & m_f^* & = & 808,5 \quad \text{mg} \end{array} \tag{D.1}$$

Le feuillard de nickel qui lui est associé a, quant à lui, les caractéristiques :

$$\begin{array}{lcll} \textit{dimensions} & L \text{ x } l \text{ x } e & = & 59,5 \text{ x } 14,7 \text{ x } 0,125 \quad (\text{mm x mm x mm}) \\ \textit{masse initiale} & m_i & = & 952,4 \quad \text{mg} \\ \textit{masse finale} & m_f & = & 962,5 \quad \text{mg} \end{array} \tag{D.2}$$

Le gain de masse du feuillard et de la mousse à la fin de l'essai d'oxydation est respectivement de :

$$\begin{array}{lcll} \Delta m & = & 10,1 & \text{mg} \\ \Delta m^* & = & 85,6 & \text{mg} \end{array} \tag{D.3}$$

De plus, le feuillard présente une surface d'absorption totale de :

$$S_{abs.totale} = 2 * 59,5 * 14,7 + 2 * 0,125 * (59,5 + 14,7) = 1768 \text{ mm}^2 \tag{D.4}$$

A l'aide de ces données, la surface d'absorption totale de la mousse de nickel peut être évaluée :

$$S^*_{abs.totale} = \frac{85,6 * 1768}{10,1} = 14984 \text{ mm}^2 \tag{D.5}$$

Or, la surface équivalente de la mousse (considérée comme un milieu massif), est de :

$$S^*_{equiv.} = 2 * 60,2 * 28,3 + 2 * 1,6 * (28,3 + 60,2) = 3690 \text{ mm}^2 \tag{D.6}$$

Le rapport $\eta$ entre la surface réelle développée par la mousse et la surface mesurée en assimilant la mousse à un milieu massif est donc de :

$$\eta = \frac{S^*_{abs.totale}}{S^*_{equiv.}} = 4 \tag{D.7}$$

Une valeur de l'épaisseur moyenne des parois des brins de nickel qui constituent la mousse peut être déduite de la surface réelle d'absorption :

$$\bar{e} = \frac{m^*_i}{\rho_{Ni}\left(\frac{S^*_{abs.totale}}{2}\right)} = \frac{722,9\ 10^{-3}}{8908.\ 10^3\left(\frac{14984.\ 10^{-6}}{2}\right)} = 11\ \mu m \tag{D.8}$$

Ce résultat reste bien sûr très approché. Par exemple, les phénomènes de TDR ne sont pas pris en compte. L'épaisseur des parois des brins est considérée comme constante dans toute la mousse. Néanmoins, on retrouve l'ordre de grandeur donné au paragraphe II.2.

## D.2 Calcul de l'incertitude sur la détermination de l'épaisseur moyenne des brins

Le calcul de l'incertitude, qui est commise en terme de mesure sur la détermination de l'épaisseur moyenne, s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{\Delta\bar{e}}{\bar{e}} = \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta S}{S} \tag{D.9}$$

avec :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta S}{S} &= \left(\frac{\Delta\left(\Delta m^*\right)}{\Delta m^*} + \frac{\Delta\left(\Delta m\right)}{\Delta m} + 2\left[\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta e}{e}\right]\right) \\ &= \left(\frac{0,02}{100} + \frac{0,02}{100} + 2\left[\frac{0,005}{60} + \frac{0,005}{15} + \frac{0,005}{0,125}\right]\right) \\ &= 2.\ 10^{-4} + 2.\ 10^{-4} + 2\left(8.\ 10^{-5} + 3.\ 10^{-4} + 0,04\right) \\ &\approx 0,08\end{aligned} \tag{D.10}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta M}{M} = \dfrac{0,005}{100} = 5.\ 10^{-5} \\ \dfrac{\Delta\rho}{\rho} = \dfrac{1}{10000} = 10^{-4} \end{cases} \tag{D.11}$$

D'où

$$\frac{\Delta\bar{e}}{\bar{e}} = 5.\ 10^{-5} + 10^{-4} + 0,08 \approx 0,08 \tag{D.12}$$

$$\boxed{\Delta\bar{e} \approx 1\ \mu m} \tag{D.13}$$

# Annexe E

# Programmes des modèles de flexion des poutres – Fichiers ZebFront

```
//=========================================================================//
//   Metalanisofoam_L_onephase.z                                           //
//                                                                         //
//  one gives the hardening property of the metal base : sig_0,H           //
//   and metal base constants : E, nu                                      //
//   and density metal base : rho and density metal foam : rho_star        //
//   and scale transition constants : C, C_rho, B, B_p                     //
//   and anisotropy ratio : R, Q                                           //
//  the model computes the effective hardening law                         //
//  tension along direction 1 - direction 1 = longitudinal direction       //
//=========================================================================//

#include <Elasticity.h>
#include <Basic_nl_behavior.h>
#include <Print.h>

#include <Bool.h>
#include <ZMath.h>
#include <Matrix.h>

class LOCAL_NEWTON_RAPHSON_L_ONEPHASE {
   protected :
      int max_iter;
      double a,b,c,d,e,f,g,h,i,j;
   public :
      LOCAL_NEWTON_RAPHSON_L_ONEPHASE() : max_iter(100),a(0),b(0),c(0),d(0),e(0),f(0),
      g(0),h(0),i(0),j(0) { }
      LOCAL_NEWTON_RAPHSON_L_ONEPHASE(int mi,double aa, double bb, double cc, double dd,
      double ee, double ff, double gg, double hh, double ii, double jj) : max_iter(mi),
      a(aa),b(bb),c(cc),d(dd),e(ee),f(ff),g(gg),h(hh),i(ii),j(jj) { }
```

```
      virtual ~LOCAL_NEWTON_RAPHSON_L_ONEPHASE() { }

      bool find_solution(VECTOR& sol,double tole);

      VECTOR f_newton_raphson(const VECTOR& x) {
        VECTOR ret(2);
        ret[0]= a*x[0]*x[0]*x[0]*x[1]+b*x[1]*x[1]*x[1]*x[0]+c*x[1]+d*x[0]+e*x[0]*x[1];
        ret[1]= f*x[0]*x[0]*x[0]*x[1]+g*x[1]*x[1]*x[1]*x[0]+h*x[1]+i*x[0]+j*x[0]*x[1];
        return(ret);
      }
      SMATRIX df_newton_raphson(const VECTOR& x) {
       SMATRIX ret(2);
       ret(0,0)= 3.*a*x[0]*x[0]*x[1] + b*x[1]*x[1]*x[1] + d + e*x[1];
       ret(0,1)= a*x[0]*x[0]*x[0] + 3.*b*x[1]*x[1]*x[0] + c + e*x[0];
       ret(1,0)= 3.*f*x[0]*x[0]*x[1] + g*x[1]*x[1]*x[1] + i + j*x[1];
       ret(1,1)= f*x[0]*x[0]*x[0] + 3.*g*x[1]*x[1]*x[0] + h + j*x[0];
       return(ret);
      }
};


@Class METALANISOFOAMLONEPHASE : BASIC_NL_BEHAVIOR {
   @Name metalanisofoamLonephase;
   @SubClass ELASTICITY elasticity;
   @Coefs    young,poisson,sig_0,H,rho,rho_star,R,Q;
   @Coefs    sol_ini1,sol_ini2,C,C_rho,B,B_p;
   @tVarAux  eel,epl;
   @sVarAux  alphaa_star;
   @sVarAux  alphac_star;
};

@Integrate {
  sig=0.;
  epl=0.;
  double eps = eto[0];
  double E = young;
  double nu = poisson;
  double E_star = (16.*C*C_rho/B)*E*(pow(R,3.)*(1.+pow(Q,3.))/(pow(Q,2.)
*pow(1.+R+Q,2.)))*pow(rho_star/rho,2.);
  double A_RD = (1./(16.*R))*(12.*B*pow(Q,3.)/(6.*(1+pow(Q,3.)))-B_p)
*pow(1./(12.*C_rho),0.25)*pow((1.+R+Q)/(R*Q),0.5)*pow(rho/rho_star,0.5);
  double B_RD = (Q/(16.*R))*(12.*B/(6.*(1.+pow(Q,3.)))-B_p)*pow(1./(12.*C_rho),0.25)
*pow(Q*(1.+R+Q)/R,0.5)*pow(rho/rho_star,0.5);
  alphaa_star = 0.;
  alphac_star = 0.;

  double sig0_star = (pow(12.*C_rho,0.75)*C/3.)*sig_0*(pow(R,1.5)*(1.+Q)/(pow(Q,0.5)
*pow(1.+R+Q,1.5)))*pow(rho_star/rho,1.5);
```

```
  if(eps<sig0_star/E_star) {
    sig[0] = E_star*eps;
    eel[0] = eps;
    eel[1] = eel[2] = -nu*eps;}
  else {

//  solve numerically third grade system: ax^2+b*y^2+c/x+d/y+e=0
//                                        f*x^2+g*y^2+h/x+i/y+j=0

    double a = A_RD;
    double b = B_RD;
    double c = -(1./(8.*R))*(12.*B*H*pow(Q,3.)/(6.*E*(1.+pow(Q,3.)))+B_p)
*(1./pow(12.*C_rho,0.25))*pow((1.+R+Q)/(R*Q),0.5)*pow(rho/rho_star,0.5);
    double d = -(Q/(8.*R))*(12.*B*H/(6.*E*(1.+pow(Q,3.)))+B_p)*(1./pow(12.*C_rho,0.25))
*pow(Q*(1.+R+Q)/R,0.5)*pow(rho/rho_star,0.5);
    double e = (E+H)*eps/sig_0 - 3.*(A_RD+B_RD);
    double f = 1.;
    double g = -pow(Q,2.);
    double h = 2.;
    double i = -2.*pow(Q,2.);
    double j = -3.*(1.-pow(Q,2.));

    LOCAL_NEWTON_RAPHSON_L_ONEPHASE eq(100,a,b,c,d,e,f,g,h,i,j);
    VECTOR sol(2);
    sol[0]=sol_ini1;
    sol[1]=sol_ini2;

    eq.find_solution(sol,1.e-18);

    alphaa_star = sol[0];
    alphac_star = sol[1];

    if(alphaa_star<0.) { cout << "alphaa_star negative!!" << endl;}
    if(alphac_star<0.) { cout << "alphac_star negative!!" << endl;}
    if(alphaa_star>1.) { cout << "alphaa_star larger than unity!!" << endl;}
    if(alphac_star>1.) { cout << "alphac_star larger than unity!!" << endl;}


    sig[0] = (C*E*sig_0*pow(12.*C_rho,0.75)/(6.*(E+H)))*(pow(R,1.5)*pow(Q,0.5)
/pow(1.+R+Q,1.5))*pow(rho_star/rho,1.5)*(3.-pow(alphaa_star,2.)+2.*H/(E*alphaa_star)
+(1./Q)*(3.-pow(alphac_star,2.)+2.*H/(E*alphac_star)));
  }

  if (m_flags&CALC_TG_MATRIX) m_tg_matrix=*elasticity;
}


bool LOCAL_NEWTON_RAPHSON_L_ONEPHASE::find_solution(VECTOR& sol,double tole)
{ VECTOR y(!sol); int iter=0;
```

```
  for(;;) {
    y=f_newton_raphson(sol);
    if(norm(y)<tole) break;
    SMATRIX tmp = df_newton_raphson(sol);
    bool ir=FALSE;
    tmp.inverse(ir);
    if(ir==FALSE) return FALSE;
    sol -= tmp*y;
    if(++iter==max_iter) return FALSE;
  }
  return TRUE;
}
```

```
//================================================================================//
//   Metalanisofoam_T_onephase.z                                                  //
//                                                                                //
//  one gives the hardening property of the metal base : sig_0,H                  //
//   and metal base constants : E, nu                                             //
//   and density metal base : rho and density metal foam : rho_star               //
//   and scale transition constants : C, C_rho, B, B_p                            //
//   and anisotropy ratio : R, Q                                                  //
//  the model computes the effective hardening law                                //
//  tension along direction 1 - direction 1 = transversal direction               //
//================================================================================//

#include <Elasticity.h>
#include <Basic_nl_behavior.h>
#include <Print.h>

#include <Bool.h>
#include <ZMath.h>
#include <Matrix.h>

class LOCAL_NEWTON_RAPHSON_T_onephase {
   protected :
      int max_iter;
      double a,b,c,d,e,f,g,h,i,j;
   public :
      LOCAL_NEWTON_RAPHSON_T_onephase() : max_iter(100),a(0),b(0),c(0),d(0),e(0),f(0),
g(0),h(0),i(0),j(0) { }
      LOCAL_NEWTON_RAPHSON_T_onephase(int mi,double aa, double bb, double cc, double dd,
double ee, double ff, double gg, double hh, double ii, double jj) : max_iter(mi),a(aa),
b(bb),c(cc),d(dd),e(ee),f(ff),g(gg),h(hh),i(ii),j(jj) { }

      virtual ~LOCAL_NEWTON_RAPHSON_T_onephase() { }

      bool find_solution(VECTOR& sol,double tole);

      VECTOR f_newton_raphson(const VECTOR& x) {
        VECTOR ret(2);
        ret[0]= a*x[0]*x[0]*x[0]*x[1]+b*x[1]*x[1]*x[1]*x[0]+c*x[1]+d*x[0]+e*x[0]*x[1];
        ret[1]= f*x[0]*x[0]*x[0]*x[1]+g*x[1]*x[1]*x[1]*x[0]+h*x[1]+i*x[0]+j*x[0]*x[1];
        return(ret);
      }
      SMATRIX df_newton_raphson(const VECTOR& x) {
       SMATRIX ret(2);
       ret(0,0)= 3.*a*x[0]*x[0]*x[1] + b*x[1]*x[1]*x[1] + d + e*x[1];
       ret(0,1)= a*x[0]*x[0]*x[0] + 3.*b*x[1]*x[1]*x[0] + c + e*x[0];
       ret(1,0)= 3.*f*x[0]*x[0]*x[1] + g*x[1]*x[1]*x[1] + i + j*x[1];
       ret(1,1)= f*x[0]*x[0]*x[0] + 3.*g*x[1]*x[1]*x[0] + h + j*x[0];
       return(ret);
     }
};
```

```
@Class METALANISOFOAMTonephase : BASIC_NL_BEHAVIOR {
   @Name metalanisofoamTonephase;
   @SubClass ELASTICITY elasticity;
   @Coefs    young, poisson, sig_0, H, rho, rho_star, R, Q, sol_ini1, sol_ini2;
   @Coefs    C, C_rho, B, B_p;
   @tVarAux  eel,epl;
   @sVarAux  alphab_star;
   @sVarAux  alphac_star;
};

@Integrate {
  sig=0.;
  epl=0.;
  double eps = eto[0];
  double E = young;
  double nu = poisson;
  double E_star = (16.*C*C_rho/B)*E*((pow(R,3.)+pow(Q,3.))/(pow(R,2.)*pow(Q,2.)
*pow(1.+R+Q,2)))*pow(rho_star/rho,2.);
  double A_TD = (pow(R,2.)/16.)*(12.*B*pow(Q,3.)/(6.*(pow(R,3.)+pow(Q,3.)))-B_p)
*pow(1./(12.*C_rho),0.25)*pow((1.+R+Q)/(R*Q),0.5)*pow(rho/rho_star,0.5);
  double B_TD = (Q/16.)*(12.*B*pow(R,3.)/(6.*(pow(R,3.)+pow(Q,3.)))-B_p)
*pow(1./(12.*C_rho),0.25)*pow(Q*(1.+R+Q)/R,0.5)*pow(rho/rho_star,0.5);
  alphab_star = 0.;
  alphac_star = 0.;

  double sig0_star = (pow(12.*C_rho,0.75)*C/3.)*sig_0*((R+Q)/(pow(R*Q,0.5)
*pow(1.+R+Q,1.5)))*pow(rho_star/rho,1.5);

  if(eps<sig0_star/E_star) {
    sig[0] = E_star*eps;
    eel[0] = eps;
    eel[1] = eel[2] = -nu*eps;}
  else {

//  solve numerically third grade system: ax^2+b*y^2+c/x+d/y+e=0
//                                        f*x^2+g*y^2+h/x+i/y+j=0

   double a = A_TD;
   double b = B_TD;
   double c = -(pow(R,2.)/8.)*(12.*B*H*pow(Q,3.)/(6.*E*(pow(R,3.)+pow(Q,3.)))+B_p)
*(1./pow(12.*C_rho,0.25))*pow((1.+R+Q)/(R*Q),0.5)*pow(rho/rho_star,0.5);
   double d = -(Q/8.)*(12.*B*H*pow(R,3.)/(6.*E*(pow(R,3.)+pow(Q,3.)))+B_p)
*(1./pow(12.*C_rho,0.25))*pow(Q*(1.+R+Q)/R,0.5)*pow(rho/rho_star,0.5);
   double e = (E+H)*eps/sig_0 - 3.*(A_TD+B_TD);
   double f = pow(R,2.);
   double g = -pow(Q,2.);
   double h = 2.*pow(R,2.);
   double i = -2.*pow(Q,2.);
```

```
   double j = -3.*(pow(R,2.)-pow(Q,2.));

   LOCAL_NEWTON_RAPHSON_T_onephase eq(100,a,b,c,d,e,f,g,h,i,j);
   VECTOR sol(2);
   sol[0]=sol_ini1;
   sol[1]=sol_ini2;

   eq.find_solution(sol,1.e-18);

   alphab_star = sol[0];
   alphac_star = sol[1];

   if(alphab_star<0.) { cout << "alphab_star negative!!" << endl;}
   if(alphac_star<0.) { cout << "alphac_star negative!!" << endl;}
   if(alphab_star>1.) { cout << "alphab_star larger than unity!!" << endl;}
   if(alphac_star>1.) { cout << "alphac_star larger than unity!!" << endl;}


   sig[0] = (C*E*sig_0*pow(12.*C_rho,0.75)/(6*(E+H)))*(pow(Q,0.5)/(pow(R,0.5)
*pow(1.+R+Q,1.5)))*pow(rho_star/rho,1.5)*(3.-pow(alphab_star,2.)+2.*H/(E*alphab_star)
+(R/Q)*(3.-pow(alphac_star,2.)+2.*H/(E*alphac_star)));
  }

  if (m_flags&CALC_TG_MATRIX) m_tg_matrix=*elasticity;
}


bool LOCAL_NEWTON_RAPHSON_T_onephase::find_solution(VECTOR& sol,double tole)
{ VECTOR y(!sol); int iter=0;

  for(;;) {
    y=f_newton_raphson(sol);
    if(norm(y)<tole) break;
    SMATRIX tmp = df_newton_raphson(sol);
    bool ir=FALSE;
    tmp.inverse(ir);
    if(ir==FALSE) return FALSE;
    sol -= tmp*y;
    if(++iter==max_iter) return FALSE;
  }
  return TRUE;
}
```

```
//=========================================================================//
//   Metalanisofoam_L_doublephase_epe.z                                    //
//                                                                         //
//  one gives the hardening property of the core metal base : sig_0,H      //
//   and core metal base constant : E                                      //
//   and external metal constant : E_ext                                   //
//   and foam density (rho_star) and core density (rho_core) and external density    //
// (rho_ext)                                                               //
//   and scale transition constants : C, C_rhoc, B, B_p                    //
//   and thickness of the cell walls of the beam/half-width beam : e_star=e/(t/2)    //
//   and anisotropy ratio : R                                              //
//   the model computes the effective hardening law                        //
//  tension along direction 1 - direction 1 = longitudinal direction       //
//=========================================================================//

#include <Elasticity.h>
#include <Basic_nl_behavior.h>
#include <Print.h>

#include <Bool.h>
#include <ZMath.h>
#include <Matrix.h>

class LOCAL_NEWTON_RAPHSON_EPE {
   protected :
      int max_iter;
      double a,b,c;
   public :
      LOCAL_NEWTON_RAPHSON_EPE() : max_iter(100),a(0),b(0),c(0) { }
      LOCAL_NEWTON_RAPHSON_EPE(int mi,double aa, double bb, double cc) : max_iter(mi),
a(aa),b(bb),c(cc) { }

      virtual ~LOCAL_NEWTON_RAPHSON_EPE() { }

      bool find_solution(VECTOR& sol,double tole);

      VECTOR f_newton_raphson(const VECTOR& x) {
        VECTOR ret(1);
        ret[0]=a*x[0]*x[0]*x[0]+b*x[0]+c;
        return(ret);
      }
      SMATRIX df_newton_raphson(const VECTOR& x) {
       SMATRIX ret(1);
       ret(0,0)=3.*a*x[0]*x[0]+b;
       return(ret);
     }
};

@Class METALANISOFOAM_EPE : BASIC_NL_BEHAVIOR {
   @Name metalanisofoam_epe;
```

```
   @SubClass ELASTICITY elasticity;
   @Coefs    young,sig_0,H,rho_ext,rho_star,rho_core,R;
   @Coefs    sol_ini1,C,C_rhoc,B,B_p,E_ext,e_star;
   @tVarAux  eel,epl;
   @sVarAux  alpha1_star;
};

@Integrate {
  sig = 0.;
  epl = 0.;
  double eps = eto[0];
  double E_core = young;
  double sig0_core = sig_0;
  double H_core = H;
  double E_star =(8.*C*pow(C_rhoc,2.)*R/(3.*B))*(E_ext+(E_core-E_ext)*pow(1-e_star,3.))
*pow(rho_star/((1.-e_star)*rho_core+e_star*rho_ext),2.);
  alpha1_star = 0.;

  double sig0_star = (2.*C*pow(C_rhoc,1.5)*sig0_core/(3.*(1.-e_star)))*
(E_ext/E_core-(E_ext/E_core-1.)*pow(1.-e_star,3.))*pow(rho_star/((1.-e_star)
*rho_core+e_star*rho_ext),1.5);

  if(eps<sig0_star/E_star) {
    sig[0] = E_star*eps;
    eel[0] = eps;
    }
  else {

//  solve numerically third grade system: a*x^2+c/x+b=0

   double a = E_core*(B-B_p)/(8.*pow(C_rhoc,0.5)*pow(rho_star/((1.-e_star)*rho_core
+e_star*rho_ext),0.5)*R*E_ext*(1.+(E_core/E_ext-1.)*pow(1.-e_star,3.)));
   double b = ((E_core+H_core)/sig0_core)*eps-3.*a*pow(1.-e_star,2.);
   double c = -2.*a*(H_core*pow(1.-e_star,3.)/E_core+(1.+H_core/E_core)*(E_ext/E_core)
*(1.-pow(1.-e_star,3.)))-B_p*(E_core+H_core)/(4.*pow(C_rhoc,0.5)
*pow(rho_star/((1.-e_star)*rho_core+e_star*rho_ext),0.5)*R*E_core);

   LOCAL_NEWTON_RAPHSON_EPE eq(100,a,b,c);
   VECTOR sol(1);
   sol[0]=sol_ini1;

   eq.find_solution(sol,1.e-18);
   alpha1_star = sol[0];

   sig[0] = (C*pow(C_rhoc,1.5)*pow(rho_star/((1.-e_star)*rho_core+e_star*rho_ext),1.5)
*sig0_core*E_core/(3.*(E_core+H_core)))*(3.*pow(1.-e_star,2.)-pow(alpha1_star,2.)
+(2./alpha1_star)*(H_core*pow(1.-e_star,3.)/E_core+(1.+H_core/E_core)*(E_ext/E_core)
*(1.-pow(1.-e_star,3.))));

   if(alpha1_star<0.) { cout << "alpha1_star negative!!" << endl;}
```

```
   if(alpha1_star>1.-e_star)
                     { cout << "alpha1_star is in external material !!" << endl;}
  }
  if (m_flags&CALC_TG_MATRIX) m_tg_matrix=*elasticity;
}

bool LOCAL_NEWTON_RAPHSON_EPE::find_solution(VECTOR& sol,double tole)
{ VECTOR y(!sol); int iter=0;

  for(;;) {
    y=f_newton_raphson(sol);
    if(norm(y)<tole) break;
    SMATRIX tmp = df_newton_raphson(sol);
    bool ir=FALSE;
    tmp.inverse(ir);
    if(ir==FALSE) return FALSE;
    sol -= tmp*y;
    if(++iter==max_iter) return FALSE;
  }
  return TRUE;
}
```

```
//================================================================================//
//   Metalanisofoam_L_doublephase_eep.z                                           //
//                                                                                //
//  one gives the hardening property of the external metal base : sig_0,H         //
//   and external metal base constant : E                                         //
//   and core metal constant : E_core                                             //
//   and foam density (rho_star) and core density (rho_core) and external density //
// (rho_ext)                                                                      //
//   and scale transition constants : C, C_rhoc, B, B_p                           //
//   and thickness of the cell walls of the beam/half-width beam : e_star=e/(t/2) //
//   and anisotropy ratio : R                                                     //
//   the model computes the effective hardening law                               //
//  tension along direction 1 - direction 1 = longitudinal direction             //
//================================================================================//

#include <Elasticity.h>
#include <Basic_nl_behavior.h>
#include <Print.h>

#include <Bool.h>
#include <ZMath.h>
#include <Matrix.h>

class LOCAL_NEWTON_RAPHSON_EEP {
   protected :
      int max_iter;
      double a,b,c;
   public :
      LOCAL_NEWTON_RAPHSON_EEP() : max_iter(100),a(0),b(0),c(0) { }
      LOCAL_NEWTON_RAPHSON_EEP(int mi,double aa, double bb, double cc) : max_iter(mi),
a(aa),b(bb),c(cc) { }

      virtual ~LOCAL_NEWTON_RAPHSON_EEP() { }

      bool find_solution(VECTOR& sol,double tole);

      VECTOR f_newton_raphson(const VECTOR& x) {
        VECTOR ret(1);
        ret[0]=a*x[0]*x[0]*x[0]+b*x[0]+c;
        return(ret);
      }
      SMATRIX df_newton_raphson(const VECTOR& x) {
       SMATRIX ret(1);
       ret(0,0)=3.*a*x[0]*x[0]+b;
       return(ret);
     }
};

@Class METALANISOFOAM_EEP : BASIC_NL_BEHAVIOR {
   @Name metalanisofoam_eep;
```

```
   @SubClass ELASTICITY elasticity;
   @Coefs    young,sig_0,H,rho_ext,rho_star,rho_core,R;
   @Coefs    sol_ini1,C,C_rhoc,B,B_p,E_core,e_star;
   @tVarAux  eel,epl;
   @sVarAux  alpha2_star;
};

@Integrate {
  sig = 0.;
  epl = 0.;
  double eps = eto[0];
  double E_ext = young;
  double sig0_ext = sig_0;
  double H_ext = H;
  double E_star=(8.*C*pow(C_rhoc,2.)*R/(3.*B))*(E_ext+(E_core-E_ext)*pow(1-e_star,3.));
  alpha2_star = 0.;

  double sig0_star = (2.*C*pow(C_rhoc,1.5)*sig0_ext/3.)*(1.+(E_core/E_ext-1.)
*pow(1.-e_star,3.));

  if(eps<sig0_star/E_star) {
    sig[0] = E_star*eps;
    eel[0] = eps;
    }
  else {

//  solve numerically third grade system: a*x^2+c/x+b=0

   double a = (B-B_p)/(8.*pow(C_rhoc,0.5)*R*(1.+(E_core/E_ext-1.)*pow(1.-e_star,3.)));
   double b = ((E_ext+H_ext)/sig0_ext)*eps-3.*a;
   double c = -2.*a*(H_ext/E_ext+(1.+H_ext/E_ext)*(E_core/E_ext-1.)*pow(1.-e_star,3.))
-B_p*(E_ext+H_ext)/(4.*pow(C_rhoc,0.5)*R*E_ext);

   LOCAL_NEWTON_RAPHSON_EEP eq(100,a,b,c);
   VECTOR sol(1);
   sol[0]=sol_ini1;

   eq.find_solution(sol,1.e-18);

   alpha2_star = sol[0];

   sig[0] = (C*pow(C_rhoc,1.5)*sig0_ext*E_ext/(3.*(E_ext+H_ext)))
*(3.-pow(alpha2_star,2.)+(2./alpha2_star)*(H_ext/E_ext+(1.+H_ext/E_ext)
*(E_core/E_ext-1.)*pow(1.-e_star,3.)));


   if(alpha2_star<0.) { cout << "alpha2_star negative!!" << endl;}
   if(alpha2_star>1.) { cout << "alpha2_star larger than unity!!" << endl;}
   if(alpha2_star<1.-e_star)
         { cout << "alpha2_star is in the elastic field !!" << endl;
```

```
          alpha2_star=1.-e_star;
          double Z = (B-B_p)/(E_ext+(E_core-E_ext)*pow(1.-e_star,3.))
+B_p/(E_core*pow(1-e_star,3.)+E_ext*H_ext*(1.-pow(1.-e_star,3.))/(E_ext+H_ext));

          sig[0]=8.*C*pow(C_rhoc,2.)*R*eps/(3.*Z)+B_p*sig0_ext*C*pow(C_rhoc,1.5)*E_ext
*(1.-pow(1.-e_star,2.))/(E_core*(E_ext+H_ext)*pow(1.-e_star,3.)
+E_ext*H_ext*(1.-pow(1.-e_star,3.))*Z);}
  }

  if (m_flags&CALC_TG_MATRIX) m_tg_matrix=*elasticity;
}


bool LOCAL_NEWTON_RAPHSON_EEP::find_solution(VECTOR& sol,double tole)
{ VECTOR y(!sol); int iter=0;

  for(;;) {
    y=f_newton_raphson(sol);
    if(norm(y)<tole) break;
    SMATRIX tmp = df_newton_raphson(sol);
    bool ir=FALSE;
    tmp.inverse(ir);
    if(ir==FALSE) return FALSE;
    sol -= tmp*y;
    if(++iter==max_iter) return FALSE;
  }
  return TRUE;
}
```

```
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
// MODELE (flexion.c) permet de décrire le COMPORTEMENT des MOUSSES OXYDEES    //
// La mousse est décrite par une cellule À BASE CARRÉE de LONGUEUR longbrin    //
// R est le RAPPORT d'ANISOTROPIE = hauteur/longbrin                           //
//                                                                             //
// Le modele fonctionne avec la version /home/zebulon/Z8.3/bin/Zrun sur chikai //
// (par exemple).                                                              //
//                                                                             //
// La courbe résultat (contrainte ; déformation) de la mousse est donné dans le //
// fichier bicouche_curv.post                                                  //
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

#include <fstream.h>
#include <time.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#define ZERO 1.e-8
#define PI 3.14159

//CALCUL de l'EPAISSEUR NORMALISEE de la COUCHE d'OXYDE

double CALC_ESTAR(double pctoxyd, double rho_int, double rho_ext, double mni,
double mo, double &e_star)
 {
  e_star = ((pctoxyd/100.)*(mni+mo)*rho_int)/((pctoxyd/100.)*(mni+mo)*rho_int
+rho_ext*(mo-(pctoxyd/100.)*mni));
 }


//CALCUL de l'EPAISSEUR du BRIN

double CALC_EPAIS(double longbrin, double C_rhoc, double e_star, double rho_star,
double rho_int, double rho_ext, double &t)
 {
  t = longbrin * sqrt(C_rhoc*rho_star/((1.-e_star)*rho_int+e_star*rho_ext));
 }


//CALCUL de l'ANGLE de ROTATION de la SECTION EXTREME de la POUTRE

double CALC_ANGL(double eps, double R, double B)
 {
  double anglrot;

  anglrot = 4.*R*eps/B;
  return(anglrot);    // attention, l'angle de la rotation de l'extremité
                      // de la poutre est exprimé en radian
 }
```

```
//ECRITURE du .INP

void ECRIT_INP(double lmoit, double angl, double e2, int n)
 {
  ofstream bicouche("bicouche.inp");

  bicouche.setf(ios::scientific,ios::floatfield);

  if (fabs(e2)<=ZERO)
      {
       bicouche << "****calcul" << endl;
       bicouche << " ***mesh" << " " <<  "plane_stress" << endl;
       bicouche << "  **file" << " " << "bicouche.geof" << endl;
       bicouche << " ***resolution" << " " << "newton" << endl;
       bicouche << "  **init_d_dof" << endl;
       bicouche << "  **sequence" << " " << "2" << endl;
       bicouche << "   *time" << " " << "1." << " " << "10." << endl;
       bicouche << "   *increment" << " " << "50" << " " << "30" << endl;
       bicouche << "   *iteration" << " " << "5" << endl;
       bicouche << "   *ratio" << " " << "0.01" << " " << "0.01" << endl;
       bicouche << "   *algorithm" << " " << "p1p2p3" << endl;
       bicouche << "  **automatic_time" << " " << "epcum" << " " << "0.01" << endl;
       bicouche << "   *security" << " " << "2." << endl;
       bicouche << "   *divergence" << " " << "2." << " " << "20" << endl;
       bicouche << "   *first_dtime" << " " << "0.01" << endl;
       bicouche << "  **max_divergence" << " " << "10." << endl;
       bicouche << " ***bc" << endl;
       bicouche << "  **impose_nodal_dof" << endl;
       bicouche << "   left" << " " << "U1" << " " << "0." << endl;
       bicouche << "   fix" << " " << "U2" << " " << "0." << endl;
       bicouche << "  **rotation" << endl;
       bicouche << "   right" << " " << "(" << lmoit << " " << "0.)" << " " << "1."
 << " " << "tab" << endl;
       bicouche << " ***table" << endl;
       bicouche << "  **name tab" << endl;
       bicouche << "   *time" << " " << "0." << " " << "1." << " " << "10." << endl;
       bicouche << "   *value" << " " << "0." << " " << "-0.5" << " " << -angl << endl;
       bicouche << " ***material" << endl;
       bicouche << "  **elset" << " " << "materiau1" << endl;
       bicouche << "   *file" << " " << "mat1_int.mat" << endl;
       bicouche << " ***output" << endl;
       bicouche << "  **verbose" << endl;
       bicouche << "  **value_at_integration" << endl;
       bicouche << "  **contour" << endl;
       bicouche << "  **frequency" << endl;
       bicouche << "   *increment" << " " << "10" << endl;
       bicouche << "  **curve epsi.test" << endl;
       bicouche << "   *node_var " << n << " " << "U2" << endl;
       bicouche << " ****return" << endl;
```

```
      bicouche << endl;
      bicouche << "****post_processing" << endl;
      bicouche << " ***global_post_processing" << endl;
      bicouche << "  **file node" << endl;
      bicouche << "  **nset left" << endl;
      bicouche << "  **process torque" << endl;
      bicouche << "   *point (0.,0.)" << endl;
      bicouche << "   *direction (0.,0.,1.)" << endl;
      bicouche << "****return" << endl;
     }
 else
    {
     bicouche << "****calcul" << endl;
     bicouche << " ***mesh" << " " <<  "plane_stress" << endl;
     bicouche << "  **file" << " " << "bicouche.geof" << endl;
     bicouche << "  ***resolution" << " " << "newton" << endl;
     bicouche << "  **init_d_dof" << endl;
     bicouche << "  **sequence" << " " << "2" << endl;
     bicouche << "   *time" << " " << "1." << " " << "10." << endl;
     bicouche << "   *increment" << " " << "50" << " " << "30" << endl;
     bicouche << "   *iteration" << " " << "5" << endl;
     bicouche << "   *ratio" << " " << "0.01" << " " << "0.01" << endl;
     bicouche << "   *algorithm" << " " << "p1p2p3" << endl;
     bicouche << "  **automatic_time" << " " << "epcum" << " " << "0.01" << endl;
     bicouche << "   *security" << " " << "2." << endl;
     bicouche << "   *divergence" << " " << "2." << " " << "20" << endl;
     bicouche << "   *first_dtime" << " " << "0.01" << endl;
     bicouche << "  **max_divergence" << " " << "10." << endl;
     bicouche << " ***bc" << endl;
     bicouche << "  **impose_nodal_dof" << endl;
     bicouche << "   left" << " " << "U1" << " " << "0." << endl;
     bicouche << "   fix" << " " << "U2" << " " << "0." << endl;
     bicouche << "  **rotation" << endl;
     bicouche << "   right" << " " << "(" << lmoit << " " << "0.)" << " " << "1."
<< " " << "tab" << endl;
     bicouche << " ***table" << endl;
     bicouche << "  **name tab" << endl;
     bicouche << "   *time" << " " << "0." << " " << "1." << " " << "10." << endl;
     bicouche << "   *value" << " " << "0." << " " << "-0.5" << " " << -angl << endl;
     bicouche << " ***material" << endl;
     bicouche << "  **elset" << " " << "materiau1" << endl;
     bicouche << "   *file" << " " << "mat1_int.mat" << endl;
     bicouche << "  **elset" << " " << "materiau2" << endl;
     bicouche << "   *file" << " " << "mat2_ext.mat" << endl;
     bicouche << " ***output" << endl;
     bicouche << "  **verbose" << endl;
     bicouche << "  **value_at_integration" << endl;
     bicouche << "  **contour" << endl;
     bicouche << "  **frequency" << endl;
     bicouche << "   *increment" << " " << "10" << endl;
```

```
      bicouche << "  **curve epsi.test" << endl;
      bicouche << "   *node_var " << n << " " << "U2" << endl;
      bicouche << " ****return" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << "****post_processing" << endl;
      bicouche << " ***global_post_processing" << endl;
      bicouche << "  **file node" << endl;
      bicouche << "  **nset left" << endl;
      bicouche << "  **process torque" << endl;
      bicouche << "   *point (0.,0.)" << endl;
      bicouche << "   *direction (0.,0.,1.)" << endl;
      bicouche << "****return" << endl;
     }
 }


//ECRITURE du MAILLAGE de la DEMI-POUTRE

void ECRIT_Z7P(double e1, double e2, double lmoit, double decoup1, double decoup2,
double decoup3)
 {
  ofstream bicouche("bicouche.z7p");

  bicouche.setf(ios::scientific,ios::floatfield);

  if (fabs(e2)<=ZERO)
      {
       bicouche << "main()" << endl;
       bicouche << "{" << endl;
       bicouche << " UTILITY_MESH" << " " << "Maillage;" << endl;
       bicouche << " ARRAY<POINT>" << " " << "points;" << endl;
       bicouche << " ARRAY<RULED>" << " " << "domains;" << endl;
       bicouche << " ARRAY<LINE>" << " " << "lines;" << endl;
       bicouche << " LISET" << " " << "left,right,fix,ligneutre;" << endl;
       bicouche << " int" << " " << "decoup1,decoup3;" << endl;
       bicouche << " double" << " " << "e1,longmoitbrin;" << endl;
       bicouche << endl;
       bicouche << "e1=" << e1 << ";" << endl;
       bicouche << "longmoitbrin=" << lmoit << ";" << endl;
       bicouche << endl;
       bicouche << "points.resize(6);" << endl;
       bicouche << endl;
       bicouche << " points[0].x=0.;" << " " << "points[0].y=-e1;" << endl;
       bicouche << " points[1].x=longmoitbrin;" << " " << "points[1].y=-e1;" << endl;
       bicouche << " points[2].x=longmoitbrin;" << " " << "points[2].y=0.;" << endl;
       bicouche << " points[3].x=0.;" << " " << "points[3].y=0.;" << endl;
       bicouche << " points[4].x=longmoitbrin;" << " " << "points[4].y=e1;" << endl;
       bicouche << " points[5].x=0.;" << " " << "points[5].y=e1;" << endl;
       bicouche << endl;
       bicouche << "decoup1=" << decoup1 << ";" << " " << "decoup3=" << decoup3 << ";"
```

```
<< endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << "lines.resize(7);" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << " lines[0].bind(points[0],points[1]);" << " " <<
"lines[0].set_nodes(decoup1,1.);" << endl;
      bicouche << " lines[1].bind(points[1],points[2]);" << " " <<
"lines[1].set_nodes(decoup3,1.);" << endl;
      bicouche << " lines[2].bind(points[2],points[4]);" << " " <<
"lines[2].set_nodes(decoup3,1.);" << endl;
      bicouche << " lines[3].bind(points[4],points[5]);" << " " <<
"lines[3].set_nodes(decoup1,1.);" << endl;
      bicouche << " lines[4].bind(points[5],points[3]);" << " " <<
"lines[4].set_nodes(decoup3,1.);" << endl;
      bicouche << " lines[5].bind(points[3],points[0]);" << " " <<
"lines[5].set_nodes(decoup3,1.);" << endl;
      bicouche << " lines[6].bind(points[3],points[2]);" << " " <<
"lines[6].set_nodes(decoup1,1.);" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << "domains.resize(2);" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << " domains[0].reset();" << endl;
      bicouche << " domains[0].name=\"materiau1\";" << " " <<
"domains[0].element_type=\"c2d8\";" << endl;
      bicouche << " domains[0].add(0,lines[0]);" << " " <<
"domains[0].add(1,lines[1]);" << endl;
      bicouche << " domains[0].add(2,lines[6]);" << " " <<
"domains[0].add(3,lines[5]);" << endl;
      bicouche << " domains[0].method=1;" << endl;
      bicouche << " domains[0].link();" << endl;
      bicouche << " domains[0].print();" << endl;
      bicouche << " domains[0].remesh();" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << " domains[1].reset();" << endl;
      bicouche << " domains[1].name=\"materiau1\";" << " " <<
"domains[1].element_type=\"c2d8\";" << endl;
      bicouche << " domains[1].add(0,lines[2]);" << " " <<
"domains[1].add(1,lines[3]);" << endl;
      bicouche << " domains[1].add(2,lines[4]);" << " " <<
"domains[1].add(3,lines[6]);" << endl;
      bicouche << " domains[1].method=1;" << endl;
      bicouche << " domains[1].link();" << endl;
      bicouche << " domains[1].print();" << endl;
      bicouche << " domains[1].remesh();" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << "left.name=\"left\";" << " " <<
"left.add(lines[4]);left.add(lines[5]);" << endl;
      bicouche << "left.order=2;" << " " << "left.link();" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << "right.name=\"right\";" << " " <<
```

```
 "right.add(lines[1]);right.add(lines[2]);" << endl;
       bicouche << "right.order=2;" << " " << "right.link();" << endl;
       bicouche << endl;
       bicouche << "ligneutre.name=\"ligneutre\";" << " " <<
 "ligneutre.add(lines[6]);" << " " << "ligneutre.order=2;" << endl;
       bicouche << "ligneutre.link();" << endl;
       bicouche << endl;
       bicouche << "fix.name=\"fix\";" << " " << "fix.add(points[2]);" << " "
 << "fix.order=2;" << " " << "fix.link();" << endl;
       bicouche << endl;
       bicouche << "master(\"save_as bicouche\");" << endl;
       bicouche << "Maillage.save(\"Z7\") ;" << endl;
       bicouche << "}" << endl;
      }
  else
     {
      bicouche << "main()" << endl;
      bicouche << "{" << endl;
      bicouche << " UTILITY_MESH" << " " << "Maillage;" << endl;
      bicouche << " ARRAY<POINT>" << " " << "points;" << endl;
      bicouche << " ARRAY<RULED>" << " " << "domains;" << endl;
      bicouche << " ARRAY<LINE>" << " " << "lines;" << endl;
      bicouche << " LISET" << " " << "left,right,fix,ligneutre;" << endl;
      bicouche << " int" << " " << "decoup1,decoup2,decoup3;" << endl;
      bicouche << " double" << " " << "e1,e2,longmoitbrin;" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << "e1=" << e1 << ";" << endl;
      bicouche << "e2=" << e2 << ";" << endl;
      bicouche << "longmoitbrin=" << lmoit << ";" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << "points.resize(10);" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << " points[0].x=0.;" << " " << "points[0].y=-(e1+e2);" << endl;
      bicouche << " points[1].x=longmoitbrin;" << " " << "points[1].y=-(e1+e2);"
 << endl;
      bicouche << " points[2].x=longmoitbrin;" << " " << "points[2].y=-e1;" << endl;
      bicouche << " points[3].x=0.;" << " " << "points[3].y=-e1;" << endl;
      bicouche << " points[4].x=longmoitbrin;" << " " << "points[4].y=0.;" << endl;
      bicouche << " points[5].x=longmoitbrin;" << " " << "points[5].y=e1;" << endl;
      bicouche << " points[6].x=0.;" << " " << "points[6].y=e1;" << endl;
      bicouche << " points[7].x=0.;" << " " << "points[7].y=0.;" << endl;
      bicouche << " points[8].x=longmoitbrin;" << " " << "points[8].y=(e1+e2);"
<< endl;
      bicouche << " points[9].x=0.;" << " " << "points[9].y=(e1+e2);" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << "decoup1=" << decoup1 << ";" << " " << "decoup2=" << decoup2 << ";"
 << " " << "decoup3=" << decoup3 << ";" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << "lines.resize(13);" << endl;
      bicouche << endl;
```

```
     bicouche << " lines[0].bind(points[0],points[1]);" << " " <<
"lines[0].set_nodes(decoup1,1.);" << endl;
     bicouche << " lines[1].bind(points[1],points[2]);" << " " <<
"lines[1].set_nodes(decoup2,1.);" << endl;
     bicouche << " lines[2].bind(points[2],points[4]);" << " " <<
"lines[2].set_nodes(decoup3,1.);" << endl;
     bicouche << " lines[3].bind(points[4],points[5]);" << " " <<
"lines[3].set_nodes(decoup3,1.);" << endl;
     bicouche << " lines[4].bind(points[5],points[8]);" << " " <<
"lines[4].set_nodes(decoup2,1.);" << endl;
     bicouche << " lines[5].bind(points[8],points[9]);" << " " <<
"lines[5].set_nodes(decoup1,1.);" << endl;
     bicouche << " lines[6].bind(points[9],points[6]);" << " " <<
"lines[6].set_nodes(decoup2,1.);" << endl;
     bicouche << " lines[7].bind(points[6],points[7]);" << " " <<
"lines[7].set_nodes(decoup3,1.);" << endl;
     bicouche << " lines[8].bind(points[7],points[3]);" << " " <<
"lines[8].set_nodes(decoup3,1.);" << endl;
     bicouche << " lines[9].bind(points[3],points[0]);" << " " <<
"lines[9].set_nodes(decoup2,1.);" << endl;
     bicouche << " lines[10].bind(points[3],points[2]);" << " " <<
"lines[10].set_nodes(decoup1,1.);" << endl;
     bicouche << " lines[11].bind(points[7],points[4]);" << " " <<
"lines[11].set_nodes(decoup1,1.);" << endl;
     bicouche << " lines[12].bind(points[6],points[5]);" << " " <<
"lines[12].set_nodes(decoup1,1.);" << endl;
     bicouche << endl;
     bicouche << "domains.resize(4);" << endl;
     bicouche << endl;
     bicouche << " domains[0].reset();" << endl;
     bicouche << " domains[0].name=\"materiau2\";" << " " <<
"domains[0].element_type=\"c2d8\";" << endl;
     bicouche << " domains[0].add(0,lines[0]);" << " " <<
"domains[0].add(1,lines[1]);" << endl;
     bicouche << " domains[0].add(2,lines[10]);" << " " <<
"domains[0].add(3,lines[9]);" << endl;
     bicouche << " domains[0].method=1;" << endl;
     bicouche << " domains[0].link();" << endl;
     bicouche << " domains[0].print();" << endl;
     bicouche << " domains[0].remesh();" << endl;
     bicouche << endl;
     bicouche << " domains[1].reset();" << endl;
     bicouche << " domains[1].name=\"materiau1\";" << " " <<
"domains[1].element_type=\"c2d8\";" << endl;
     bicouche << " domains[1].add(0,lines[2]);" << " " <<
"domains[1].add(1,lines[11]);" << endl;
     bicouche << " domains[1].add(2,lines[8]);" << " " <<
"domains[1].add(3,lines[10]);" << endl;
     bicouche << " domains[1].method=1;" << endl;
     bicouche << " domains[1].link();" << endl;
```

```
      bicouche << " domains[1].print();" << endl;
      bicouche << " domains[1].remesh();" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << " domains[2].reset();" << endl;
      bicouche << " domains[2].name=\"materiau1\";" << " " <<
 "domains[2].element_type=\"c2d8\";" << endl;
      bicouche << " domains[2].add(0,lines[3]);" << " " <<
 "domains[2].add(1,lines[12]);" << endl;
      bicouche << " domains[2].add(2,lines[7]);" << " " <<
 "domains[2].add(3,lines[11]);" << endl;
      bicouche << " domains[2].method=1;" << endl;
      bicouche << " domains[2].link();" << endl;
      bicouche << " domains[2].print();" << endl;
      bicouche << " domains[2].remesh();" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << " domains[3].reset();" << endl;
      bicouche << " domains[3].name=\"materiau2\";" << " " <<
 "domains[3].element_type=\"c2d8\";" << endl;
      bicouche << " domains[3].add(0,lines[4]);" << " " <<
 "domains[3].add(1,lines[5]);" << endl;
      bicouche << " domains[3].add(2,lines[6]);" << " " <<
 "domains[3].add(3,lines[12]);" << endl;
      bicouche << " domains[3].method=1;" << endl;
      bicouche << " domains[3].link();" << endl;
      bicouche << " domains[3].print();" << endl;
      bicouche << " domains[3].remesh();" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << "left.name=\"left\";" << " " << "left.add(lines[6]);
 left.add(lines[7]);left.add(lines[8]);left.add(lines[9]);" << endl;
      bicouche << "left.order=2;" << " " << "left.link();" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << "right.name=\"right\";" << " " << "right.add(lines[1]);
 right.add(lines[2]);right.add(lines[3]);right.add(lines[4]);" << endl;
      bicouche << "right.order=2;" << " " << "right.link();" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << "ligneutre.name=\"ligneutre\";" << " " <<
 "ligneutre.add(lines[11]);" << " " << "ligneutre.order=2;" << endl;
      bicouche << "ligneutre.link();" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << "fix.name=\"fix\";" << " " << "fix.add(points[4]);" << " "
 << "fix.order=2;" << " " << "fix.link();" << endl;
      bicouche << endl;
      bicouche << "master(\"save_as bicouche\");" << endl;
      bicouche << "Maillage.save(\"Z7\") ;" << endl;
      bicouche << "}" << endl;
     }
 }


//FONCTION pour savoir si les fichiers possèdent une entete
```

```
int BOOL()
 {
  ifstream torque("bicouche.post");
  ifstream flech("epsi.test");

  int n1,n2,etat;

  torque >> n1;
  flech >> n2;

  if (n1==n2)
    {
     etat=1;
     return (etat);
    }
 }


//PASSAGE MICRO-MACRO

void LOI_ECH(double E_int, double E_ext, double sig0_int, double H_int,
double rho_star, double rho_int, double rho_ext, double e_star, double longbrin,
double t, double C, double B, double R, double Bp, double C_rhoc)
 {
  ifstream flechtorq("resu.curv2");
  ofstream changechl("bicouche_curv.post");

  changechl.setf(ios::scientific,ios::floatfield);

  double time1,time2,flechtot,torquezeb,sig0_star,sig_star,eps_star,E_star;

  // calcul limite d'élasticité de la mousse
  sig0_star= (2*C*C_rhoc*sqrt(C_rhoc)*sig0_int/3.)*(rho_star/((1.-e_star)*rho_int
+e_star*rho_ext))*sqrt(rho_star/((1.-e_star)*rho_int+e_star*rho_ext))*((1.-e_star)
*(1.-e_star)+(E_ext/E_int)*((1.-(1.-e_star)*(1.-e_star)*(1.-e_star))/(1.-e_star)));

  changechl << "#time" << " " << "flechtotale(node_U2)" << " " << "torqueZeb" <<
 " " << "epsilon_star" << " " << "sig_star" << endl;
  changechl << "0.0" << " " << "0.0" << " " << "0.0" << " " << "0.0" << " " <<
 "0.0" << endl;

  for(int i=0;i<10000.;i++)
   {
    flechtorq >> time1 >> flechtot >> time2 >> torquezeb;

    sig_star=(torquezeb*t*0.001*0.001*0.001*0.001)*4.*C/(longbrin*longbrin*longbrin);

    if(sig_star < sig0_star)
       {
```

```
eps_star = flechtot*0.001*0.001*B/(R*longbrin);

changechl << time1 << " " << flechtot << " " << torquezeb << " " << eps_star
 << " " << sig_star << endl;
       }

    else
       {
         // calcul du module de Young de la mousse à brins composites (direction RD)
        E_star = (8.*C*C_rhoc*C_rhoc*R/(3.*B))*(rho_star/((1.-e_star)*rho_int
+e_star*rho_ext))*(rho_star/((1.-e_star)*rho_int+e_star*rho_ext))*(E_ext+(E_int-E_ext)
*(1.-e_star)*(1.-e_star)*(1.-e_star));

//la formule de eps_star ci-dessous suppose que Be = B
        eps_star = B*flechtot*0.001*0.001/(R*longbrin) + (Bp-B)*(flechtot*0.001
                  *0.001/(R*longbrin) - sig_star/(E_star*B));

        //formule de eps_star à partir de l'expression de deltap en fonction de delta
        //non utile car résultat identique à la formule avec Be = B
        //double alpha_star = sig0_int*longbrin*longbrin/(4.*E_int*t*flechtot*0.001
        //                    *0.001);
//eps_star = sig_star/E_star + (Bp*sig0_int*E_int*longbrin/(8.*R*t
        //           *(E_int+H_int)*(E_ext+(E_int-E_ext)*(1.-e_star)*(1.-e_star)
        //           *(1.-e_star))))*(alpha_star*alpha_star - 3.*(1.-e_star)
        //           *(1.-e_star) + 2.*(1.-e_star)*(1.-e_star)*(1.-e_star)/alpha_star);

        changechl << time1 << " " << flechtot << " " << torquezeb << " " << eps_star
 << " " << sig_star << endl;
       }

    }
 }


//PROGRAMME PRINCIPAL

int main()
{
  double longbrin = 0.00018; // longueur brin determinée par MEB (m)
  double R = 1.03;           // rapport d'anisotropie des mousses

  double rho_int = 8908.;    // densité du nickel (kg/m3)
  double rho_ext = 7450.;    // densité de l'oxyde de nickel (kg/m3)
  double C_rhoc = 1.65;      // constante liant la densité de la mousse au rapport
                             // longueur sur section du brin
  double mni = 58.7;         // masse atomique nickel (g)
  double mo  = 16.;          // masse atomique oxygène (g)

  double E_int = 204000.;    // module de Young du matériau intérieur 1
  double sig0_int = 70.;     // limite élasticité du matériau intérieur 1
```

```
  double H_int = 1800.;      // module plastique du matériau intérieur 1
  double E_ext = 220000.;    // module de Young du matériau extérieur 2

  double B = 4.55;           // passage micro-macro sur la déformation
  double Bp = 1.18;          // passage micro-macro sur la déformation plastique
  double C = 0.92;           // passage micro-macro sur la contrainte


  double foameto,rho_star,pctoxyd,e_int,e_ext,e_star,t,e_intmicr,e_extmicr;
  double theta,THETA;
  int    n,nn,decoupeint, decoupeext, decoupel,etat,booleen;
  double lsur2 = longbrin/2.;
  double lsur2micr = lsur2 * 1000000.;


  cout << "Quelle est la déformation max de la mousse que tu désires atteindre ?"
<< endl;
  cin >> foameto;
  cout << "Quelle est la densité de la mousse en kg/m3 ? (mousse nickel 420g/m2 = 250.)
" << endl;
  cin >> rho_star;
  cout << "Quel est le gain en masse de la mousse en % ? (Ex: mousse oxydée = 0.35
equivaut a 0.35%)" << endl;
  cin >> pctoxyd;


  CALC_ESTAR(pctoxyd, rho_int, rho_ext, mni, mo, e_star);

  theta = CALC_ANGL(foameto, R, Bp); //en plasticité
//theta = CALC_ANGL(foameto, R, B); //si comportement uniquement élastique
  THETA = theta*180./PI;

  CALC_EPAIS(longbrin, C_rhoc, e_star, rho_star, rho_int, rho_ext, t);
  e_int = (t/2.)*(1.-e_star);
  e_ext = (t/2.)*e_star;
  e_intmicr = 1000000.*e_int;
  e_extmicr = 1000000.*e_ext;

  if (fabs(e_star)<=ZERO)
       {
        cout << "demi-épaisseur poutre e_int=" << e_intmicr << "microns "
 << "Combien d'éléments voulez-vous pour le maillage de la demie épaisseur ? " << endl;
        cin >> decoupeint;
        cout << "l/2=" << lsur2micr << "microns " << "Combien d'éléments voulez-vous
 pour le maillage de la demi-longueur de la poutre ? " << endl;
        cin >> decoupel;
decoupeext=0;
       }
  else
      {
```

```
       cout << "e_int=" << e_intmicr << "microns " << "Combien d'éléments voulez-vous
 pour le maillage de la demi-partie intérieure ? " << endl;
       cin >> decoupeint;
       cout << "e_ext=" << e_extmicr << "microns " << "Combien d'éléments voulez-vous
 pour le maillage de la couche extérieure ? " << endl;
       cin >> decoupeext;
       cout << "l/2=" << lsur2micr << "microns " << "Combien d'éléments voulez-vous
 pour le maillage de la poutre dans sa longueur ? " << endl;
       cin >> decoupel;
      }


  ECRIT_Z7P(e_intmicr,e_extmicr,lsur2micr,decoupel,decoupeext,decoupeint);
  system("Zrun -B bicouche.z7p");
  system("Zrun -B bicouche.mast");

  system("find . -name \"bicouche.geof\" -exec grep \"0.00000000e+00 0.00000000e+00\"
{} \\; > ptzero.tmpl");
  system("awk '{print $1}' ptzero.tmpl > ptzero.tmpl2");
  ifstream fich1("ptzero.tmpl2");
  fich1 >> n;
  ECRIT_INP(lsur2micr,THETA,e_extmicr,n);
  system("Zrun bicouche");
  system("Zrun -pp bicouche");
  system("rm ptzero.tmpl ptzero.tmpl2");

  booleen=BOOL();
  if (booleen==1)
      { //si le fichier bicouche.post possède un entete de 2 lignes
        system("paste epsi.test bicouche.post > resu.curv");
        system("more +3 resu.curv > resu.curv2");
      }
  else
      { //si le fichier bicouche.post ne possède pas de ligne d'entete
        system("more +3 epsi.test > epsi.test2");
        system("paste epsi.test2 bicouche.post > resu.curv2");
      }

  LOI_ECH(E_int, E_ext, sig0_int, H_int, rho_star, rho_int, rho_ext, e_star, longbrin,
t, C, B, R, Bp, C_rhoc);
}
```

# Annexe F

# Logiciel de corrélation d'images : principe et tests de validation

## F.1 Vocabulaire relatif au logiciel de corrélation d'images (CinEMA)

Les définitions des termes spécifiques au logiciel de corrélation d'images numériques utilisé sont reportées dans cette annexe et illustrées sur la figure F.1.

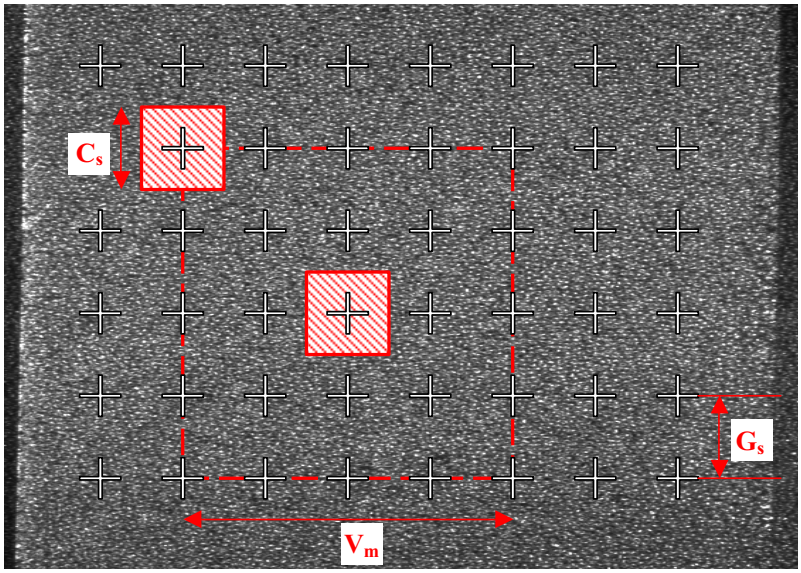



**Figure F.1** : Définition des paramètres du logiciel de corrélation d'images CinEMA.

***Facteur d'échelle***

Le facteur d'échelle donne la correspondance entre un pixel et sa valeur métrique (par exemple, en $\mu$m). Il est fonction du grandissement de l'objectif de la caméra, de la distance de travail entre la caméra et l'échantillon, et de la résolution de l'image (par exemple, $1280 \times 1024$). Il sera aussi appelé résolution d'observation dans ce travail.

Les facteurs d'échelle utilisés dans cette thèse s'étendent de 15 à 500 $\mu$m/pixel.

***Fenêtre de corrélation $C_s$ (Correlation size)***
Une fenêtre de corrélation est associée à tout point de la grille dont on cherche le déplacement. Elle est composée des niveaux de gris des pixels voisins. Cette cellule constitue alors un motif dont la taille doit être statistiquement représentative de la distribution d'éclairement de l'image à un instant donné. Le logiciel déplace cette fenêtre sur l'image à corréler. Lorsqu'il obtient la meilleure coïncidence pour les niveaux de gris des fenêtres de corrélation des deux images (pic de corrélation maximal), il en déduit le déplacement du point associé à cette fenêtre.
Les valeurs utilisées sont de l'ordre de 40 pixels suivant la direction verticale et 20 pixels suivant la direction horizontale.

***$C_s$ adaptative***
La $C_s$ adaptative utilise les résultats d'une première corrélation. Contrairement à la méthode "classique" qui compare des motifs bruts non déformés, la méthode par $C_s$ adaptative modifie la forme de la fenêtre de corrélation en fonction des fichiers déplacements (.dep) issus d'une première corrélation. Au cours de la deuxième corrélation, les motifs de la fenêtre de corrélation à rechercher sont donc plus proches de ceux de l'état déformé. La corrélation est ainsi facilitée et la mesure des déplacements plus précise. L'inconvénient réside dans le temps de calcul qui s'allonge inexorablement. La méthode de la $C_s$ adaptative n'est pas employée dans cette thèse pour déterminer les champs de déplacement. En effet, compte tenu des faibles taux de déformation de la mousse, la forme de la fenêtre de corrélation entre la première et la dernière image n'est pas trop différente. Son emploi n'est donc pas justifié dans le cas des mousses métalliques.

***Vecteur de recherche maximal $V_m$***
Le vecteur de recherche maximal indique la dimension de la zone de recherche pour la fenêtre de corrélation autour du point de la grille considéré. Par exemple, pour un $V_m$ de 1, le logiciel déplace la fenêtre de corrélation sur les huit premiers points voisins de la grille. Plus les déplacements sont faibles entre deux images à corréler, plus le vecteur maximal de recherche doit être choisi petit.
Pour un dépouillement incrémental dans le cas des mousses de nickel, un $V_m$ de 15 pixels est largement suffisant.

***Distance entre points de la grille $G_s$ (Grid step)***
Ce paramètre permet de choisir le pas de la grille. Il conditionne le nombre de points dont on cherche les composantes du vecteur déplacement. Le choix de ce paramètre est donc lié à l'échelle des hétérogénéités du matériau que l'on souhaite étudier. Le pas minimal correspond à $G_s = 1$. Chaque pixel de l'image représente un nœud de la grille.
Les pas de grille employés dans le cas des mousses varient entre 1 et 15. Leur choix dépend du facteur d'échelle utilisé et des dimensions de la zone cartographiée.

***Pavé d'approximation $N_s$ (Nombre de pas)***
Le pavé d'approximation sert uniquement au calcul des déformations. Il est défini par le nombre de pas $N_s$. Par exemple, pour un $N_s$ de 3, le pavé d'approximation, centré sur le point dont on désire connaître la déformation, est un carré de $7 \times 7$ points de la grille. Le gradient des déplacements associé aux 48 points de la grille est alors calculé. La valeur de la déformation au point central du pavé d'approximation est prise égale à la moyenne des 48 gradients. La dimension du nombre de pas s'exprime en nombre de points de la grille.

***Mouvement de solide rigide (MSR)***
Un calcul de type mouvement de solide rigide est réalisé en préambule. Ce calcul, effectué sur un nombre limité de points, permet d'avoir une idée du déplacement du point central en considérant la déformation de l'éprouvette comme homogène. Cette valeur sert à réévaluer la position des autres points de la grille. Ainsi, la distance de recherche entre un point et sa déformée est réduite. On peut donc choisir des vecteurs

maximaux de recherche plus petits. Cette étape permet de gagner du temps au cours de la phase de corrélation.

***Mode de dépouillement absolu***
La même image de référence est choisie pour déterminer les champs de déplacement de toute la série d'images. Habituellement, l'image de l'éprouvette à l'état initial avant traction est choisie comme image de référence. Le logiciel cherche donc à corréler toutes les autres images avec l'image de référence. Cette méthode est efficace pour des taux de déformation assez faibles, inférieurs à 20 %, tant que le motif de corrélation ne devient pas trop différent de celui de l'image de référence.

***Mode de dépouillement incrémental***
Pour comparer les motifs de corrélation de l'image $N$, le dépouillement incrémental considère l'image $(N-1)$ comme image de référence. La corrélation est donc plus facile puisque les motifs et les conditions d'éclairement changent peu entre deux images successives. Cependant, les erreurs se cumulent d'une carte de déplacement à l'autre. Elles peuvent conduire à une dérive importante (voir section b), page 254). Ce mode de dépouillement ne peut être utilisé que dans le cas de forts taux de déformations, lorsque l'erreur devient du second ordre par rapport à la déformation.

***Mode de dépouillement mixte***
Le mode mixte consiste à un mélange des deux méthodes précédentes. On change d'image de référence à intervalle régulier. Par exemple, pour connaître le champ de déplacement de 100 images, on peut choisir de corréler les dix premières images avec l'image initiale comme référence. Puis les dix suivantes avec la dixième image comme référence, les dix autres suivantes avec la vingtième image comme référence et ainsi de suite.

## F.2 Logiciel de corrélation d'images (CinEMA)

### F.2.1 Principe de la méthode d'intercorrélation d'images numériques

Le principe général de la méthode d'intercorrélation d'images numériques consiste à retrouver un motif pris dans une image dite de référence dans une autre image. Dans la suite, l'image 1 désigne l'image servant de référence et l'image 2, celle où l'on désire connaître le champ des déplacements. Les points particuliers où la mesure des déplacements est effectuée sont définis dans l'image de référence. A chaque point de la grille (pixel de la surface de l'objet étudié), une fenêtre de corrélation $C_s$ est associée. Le déplacement d'un point de la grille est alors repéré par la signature optique de sa zone associée. Il est donc déterminé à partir du déplacement moyen de son environnement optique.

La méthode d'intercorrélation d'images numériques consiste à trouver le décalage existant entre deux signaux bidimensionnels, donnés par la variation de la répartition de l'intensité lumineuse dans les fenêtres de corrélation de l'image 1 et 2. Elle compare et donne le degré de ressemblance entre les signaux en niveaux de gris des deux images à l'aide des fonctions d'auto- et d'inter-corrélation. Ces calculs peuvent être menés indifféremment dans l'espace réel ou dans l'espace de Fourier. En s'appuyant sur l'outil mathématique des transformées de Fourier rapide (T.F.R.), l'espace de Fourier permet d'accéder plus rapidement aux résultats car les produits se transforment en somme dans l'espace de Fourier (Hild et al., 1999). Le logiciel CinEMA de l'Ecole des Mines d'Alès, utilisé dans cette thèse, se sert de la corrélation directe dans l'espace réel.

La fonction d'intercorrélation s'écrit :

$$\phi_{Im_1,Im_2}(u,v) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} Im_1(x,y)\ Im_2(x+u,y+v) \tag{F.1}$$

où $Im_1$ et $Im_2$ représentent respectivement les intensités lumineuses des images 1 et 2
$(u, v)$ les coordonnées spatiales du décalage
$(x, y)$ les coordonnées spatiales des points de l'image dont on souhaite connaître le déplacement

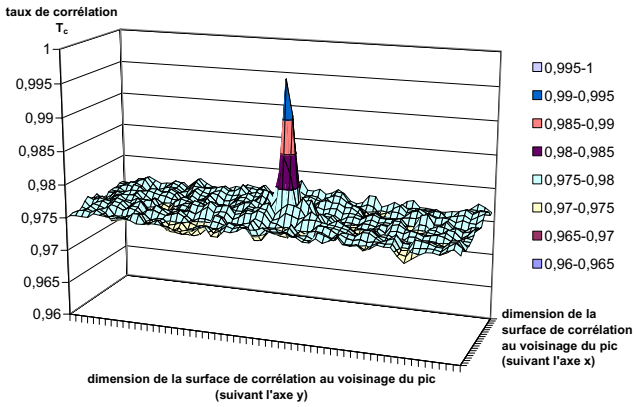
La fonction d'intercorrélation mesure la similitude entre deux images. Le logiciel de corrélation d'images cherche donc le maximum de vraisemblance pour un couple de décalage $(u, v)$ au pixel près. La fonction d'autocorrélation correspond à une fonction d'intercorrélation particulière ; celle où les deux signaux sont identiques (par exemple, $\phi_{Im_1,Im_1}(u, v)$).

A partir de ces fonctions, on définit le taux de corrélation entre deux images $T_c$ de la manière suivante :

$$T_c = \frac{\phi_{Im_1,Im_2}(u, v)}{\sqrt{\phi_{Im_1,Im_1}(u, v)}\sqrt{\phi_{Im_2,Im_2}(u, v)}} \tag{F.2}$$

Pour deux images identiques, $T_c$ vaut 1. Le taux de corrélation donne une appréciation sur la qualité de la corrélation effectuée entre deux images. La figure F.2 illustre ce propos. Elle représente le taux de corrélation pour le point central de la zone étudiée. Si le pic de corrélation est très fin et très marqué (voir figure F.2a), cela signifie que la zone de coïncidence du motif a été trouvée sans ambiguïté. La répartition en niveaux de gris du motif ne correspond que pour un nombre restreint de pixels. Au contraire, si l'on observe un pic de corrélation plus étalé en forme de cloche (voir figure F.2b), on aura une plus grande imprécision sur la détermination du déplacement du point. Cela se produit si la fenêtre de corrélation ne possède pas assez de niveaux de gris ou si la couleur de la surface de l'échantillon est trop uniforme. Le taux de corrélation donne donc une information visuelle sur la qualité de la corrélation. Il permet aussi de contrôler le choix des valeurs des paramètres utilisés lors du dépouillement. Par exemple, si le pic est en limite de zone ou n'existe pas dans la fenêtre, cela signifie qu'aucune coïncidence privilégiée n'a été trouvée dans la zone d'étude de l'image. Il faut donc agrandir la zone d'investigation en prenant un vecteur maximal de recherche $V_m$ plus grand.

a)




b)

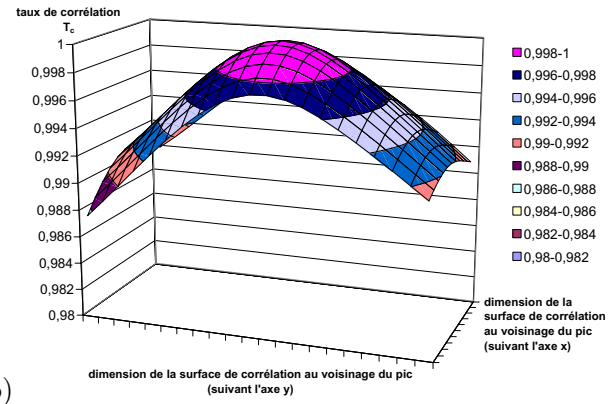



**Figure F.2** : Pic de corrélation : a) corrélation correcte, b) corrélation mauvaise.

### F.2.2 Procédure de dépouillement des résultats

Le logiciel de corrélation d'images permet de passer des informations en niveaux de gris contenues dans chaque image aux champs de déformation. Pour cela, le dépouillement se fait en trois étapes :

1. recherche du mouvement de solide rigide (MSR) ;
2. recherche des champs de déplacement ;
3. calcul des champs de déformation.

La précision du rattrapage mécanique n'étant pas suffisante, une première estimation numérique du déplacement du point central de l'éprouvette est effectuée. Lors de cette étape, une grille virtuelle "grossière" contenant peu de lignes et peu de colonnes, est positionnée sur l'image. L'écart entre le vecteur déplacement du point central et les points de la grille "grossière" est alors estimé par la méthode d'intercorrélation. Un changement de repère de l'amplitude du mouvement de solide rigide est alors opéré sur l'image 1 de référence. L'image de référence est ainsi transformée en l'image $1'$. L'image $1'$, plus proche de l'image 2 que l'image 1, est alors comparée avec l'image 2. Le calcul du MSR permet donc de diminuer les dimensions de la zone de recherche autour des points de la grille et de gagner en temps de calcul car cette première estimation se fait sur un nombre très réduit de points. Dans sa thèse, Fazilay Laraba-Abbes (Laraba-Abbes, 1998) annonce le gain d'un facteur 10 sur le temps de calcul grâce au calcul préliminaire du MSR. On remarquera que le recalage du MSR se fait au pixel près.

Un calcul de corrélation directe est ensuite réalisé pour chaque point d'une grille régulière plus fine. Cette grille fine, définie par l'opérateur, représente tous les points de l'image où la mesure des déplacements est effectuée. Les déplacements sont alors déterminés par les maxima de la fonction de corrélation avec une précision au pixel près. Cependant, les déplacements cherchés sont difficilement des multiples entiers des coordonnées en pixel. De plus, comme le signale Doumalin dans sa thèse (Doumalin, 2000), la précision au pixel est largement insuffisante dans le cas des petites déformations macroscopiques (inférieures à 5 %). Une amélioration de la précision est alors réalisée, à l'aide d'une interpolation quadratique sur les valeurs d'un pavé, centré sur le maximum de vraisemblance (voir figure F.3). Cette interpolation affine la résolution des composantes du vecteur déplacement cherché. On obtient une précision subpixel, typiquement de l'ordre de $4/100^{e}$ de pixel (voir section a), page 251).

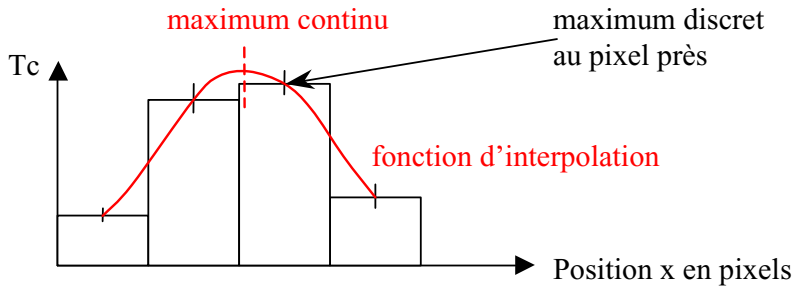



**Figure F.3** : Principe de la précision subpixel.

A partir des valeurs des déplacements (fichiers .dep), plusieurs méthodes sont possibles pour évaluer les déformations. Deux méthodes de calcul des tenseurs des déformations de Green-Lagrange ont été regardées. La première consiste à calculer le gradient du champ de déplacement en chaque point des pavés d'approximation. La valeur de la déformation en un point de la grille est déterminée grâce à une méthode d'approximation (au sens des moindres carrés) sur l'ensemble des gradients de déplacement des points situés à l'intérieur du pavé d'approximation. Ce calcul, développé dans le logiciel de corrélation, se fait sur les composantes du vecteur déplacement cumulé. Le vecteur déplacement cumulé représente la somme des déplacements incrémentaux jusqu'à la carte considérée. Le point est toujours repéré par rapport à sa configuration initiale. Une deuxième méthode consiste à se servir des éléments finis. Une fois le champ des déplacements établi par corrélation d'images, on dispose d'un maillage régulier à éléments carrés linéaires, dont les déplacements aux nœuds sont connus. Les déformations aux points de Gauss sont alors faciles à calculer par interpolation. Cependant, les déformations définies par éléments finis sont uniquement établies à l'aide des déplacements aux quatre nœuds. La méthode des éléments finis est plus sensible à l'erreur commise sur les déplacements et donne des profils de déformation plus "bruités". Dans ce travail, les déformations sont calculées à l'aide du logiciel de corrélation d'images.

Les différentes phases du dépouillement effectué sur les séries d'images expérimentales sont résumées sur la figure F.4.

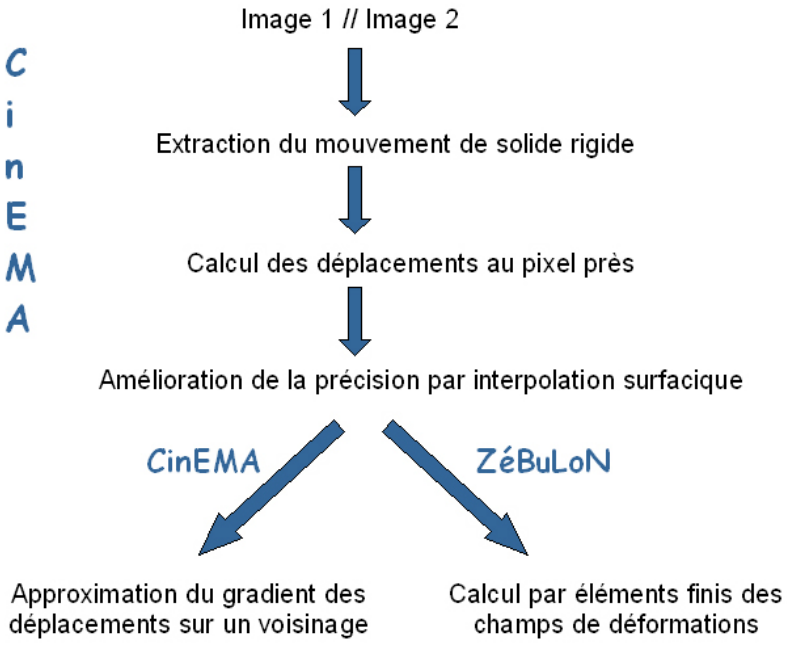



**Figure F.4** : Procédure de dépouillement des séries d'images.

Les résultats sont visualisés à l'aide du dépouillement graphique Zmaster du code Z-set.

### F.2.3 Degrés de liberté : choix des paramètres

Plusieurs paramètres permettent d'adapter le dépouillement des champs de déplacement et le calcul des champs de déformation au cas étudié. Le logiciel de corrélation CinEMA permet d'intervenir sur les paramètres suivants :

- le mode de dépouillement (absolu, incrémental ou mixte) ;
- le choix d'une $C_s$ adaptative ou non ;
- le choix des paramètres $G_s$, $C_s$, $V_m$ intervenant dans la détermination des champs de déplacement (MSR, .dep) ;
- le choix du paramètre $N_s$ pour le calcul des champs de déformation.

Compte tenu des faibles taux de déformation macroscopique des mousses ($< 20$ %), le mode absolu est choisi pour le dépouillement de tous les champs de déplacement et la méthode de la $C_s$ adaptative n'est pas utilisée.

Le choix des paramètres ($G_s$, $C_s$, $V_m$) qui interviennent dans le calcul des déplacements est important. Il faut essayer de les optimiser au mieux pour limiter le temps de calcul. Cependant, la taille de la fenêtre de corrélation $C_s$ ne doit pas être inférieure à celle de la zone caractérisant la distribution d'éclairement de l'image et le vecteur maximal de recherche $V_m$ doit être nécessairement supérieur aux déplacements des points de la grille. Le pas de la grille $G_s$ dépend, quant à lui, du nombre de points souhaités pour la description du champ des déformations.

Le paramètre $N_s$, utilisé pour le calcul des déformations, est lui aussi fonction des hétérogénéités du matériau. En effet, les déformations calculées sont plus ou moins moyennées selon le taille du pavé d'approximation choisi. Pour des phénomènes de localisation avec de forts gradients de déformation, une valeur de $N_s$ petite doit être sélectionnée pour faire ressortir ces gradients locaux. Sinon, les déformations apparaissent lissées. Cependant, l'erreur moyenne commise est beaucoup plus importante pour des choix de $N_s$ petits puisque le pavé d'approximation comprend une moins bonne statistique (moins de points). Selon Jean-Samuel Wienin (Wienin, 2001), l'évolution de cette erreur est une fonction hyperbolique du nombre de pas. Il constate dans sa thèse qu'il existe une valeur seuil (autour de $N_s = 5$) en deçà de laquelle l'erreur moyenne sur les déformations augmente très rapidement.

Dans le cas des mousses, à la résolution choisie (130-150 $\mu$m), un $G_s$ de 1 et un $N_s$ de 5 a été adopté dans la plupart des situations. La déformation est donc calculée pour un pavé d'approximation de l'ordre de 1,5 mm de côté (3 cellules).

## F.3 Quantification de l'erreur expérimentale

Des tests de validation de la méthode de corrélation d'images ont été réalisés. Plusieurs types de mesures d'erreurs sont effectués sur des échantillons réels de mousse et dans les conditions réelles de l'expérience. Ces tests ont pour but d'évaluer la précision de la mesure mais surtout, de connaître la confiance qu'il est possible d'accorder aux valeurs des champs de déplacement trouvés, dans le cas des mousses métalliques à cellules ouvertes.

La série de tests effectués se divise en trois catégories :

- étude de l'erreur commise par le logiciel de corrélation CinEMA ;
- étude des effets 3D de la mousse ;
- comparaison avec un autre logiciel de corrélation et un matériau test.

### F.3.1 Erreur intrinsèque au logiciel de corrélation CinEMA

#### a) Précision de la méthode de corrélation d'images

La précision de la méthode de corrélation d'images est testée à l'aide de deux images identiques. Après l'acquisition d'une image de la surface de l'éprouvette, celle-ci est dupliquée informatiquement (copier/coller). Un calcul de corrélation entre ces deux images rigoureusement identiques, est effectué sur une trentaine de points. Les deux images ont donc les mêmes conditions d'éclairement et un mouvement de solide rigide théoriquement nul. Le facteur d'échelle des deux images est de 150 $\mu$m/pixel.

Le tableau F.1 représente les résultats de la corrélation d'images lors du calcul de recherche du MSR. Ce tableau montre que l'écart maximal relevé sur le calcul du MSR est inférieur au centième de pixel. La moyenne des erreurs commises sur l'ensemble des trente points est de l'ordre de cinq millièmes de pixel. Pour un facteur d'échelle de 150 $\mu$m/pixel, le logiciel de corrélation d'images commet donc, en moyenne, une erreur sur le calcul du MSR de l'ordre de 0,75 $\mu$m.

Le tableau F.2 représente le champ de déplacement. Sur ce tableau, on peut voir que la moyenne des erreurs effectuées sur les déplacements est de l'ordre de deux centièmes de pixel et que l'écart maximal est inférieur à quatre centièmes de pixel. Ce chiffre correspond à celui mentionné par Laraba–Abbes dans sa thèse (Laraba-Abbes, 1998). Il correspond aussi à celui trouvé par Hild et al. (Hild et al., 1999) dans l'étude du décalage d'un signal par transformée de Fourier rapide (TFR). Une image correspond

| FICHIER .MSR | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Coordonnées en pixels | | Déplacements en pixels | | Numéro du nœud | Taux de corrélation |
| X | Y | Ux | Uy | | |
| 588 | 424 | -0,000917 | -0,00032 | 0 | 1 |
| 589 | 424 | -0,006323 | -0,001241 | 1 | 1 |
| 590 | 424 | -0,003994 | -0,002914 | 2 | 1 |
| 591 | 424 | -0,002721 | -0,003279 | 3 | 1 |
| 592 | 424 | 0,000129 | -0,003035 | 4 | 1 |
| 588 | 425 | -0,001172 | -0,003459 | 5 | 1 |
| 589 | 425 | -0,006449 | -0,002748 | 6 | 1 |
| 590 | 425 | -0,004386 | -0,001996 | 7 | 1 |
| 591 | 425 | -0,002672 | -0,00203 | 8 | 1 |
| 592 | 425 | 0,000435 | -0,001843 | 9 | 1 |
| 588 | 426 | -0,000436 | -0,004835 | 10 | 1 |
| 589 | 426 | -0,007126 | -0,003652 | 11 | 1 |
| 590 | 426 | -0,003271 | -0,003404 | 12 | 1 |
| 591 | 426 | -0,002643 | -0,003423 | 13 | 1 |
| 592 | 426 | 0,000683 | -0,00321 | 14 | 1 |
| 588 | 427 | 0,001177 | -0,006879 | 15 | 1 |
| 589 | 427 | -0,007087 | -0,006141 | 16 | 1 |
| 590 | 427 | -0,001919 | -0,006395 | 17 | 1 |
| 591 | 427 | -0,002155 | -0,008169 | 18 | 1 |
| 592 | 427 | 0,000833 | -0,008549 | 19 | 1 |
| 588 | 428 | 0,00038 | -0,009884 | 20 | 1 |
| 589 | 428 | -0,007457 | -0,00913 | 21 | 1 |
| 590 | 428 | -0,001651 | -0,008715 | 22 | 1 |
| 591 | 428 | -0,002604 | -0,009356 | 23 | 1 |
| 592 | 428 | 0,000153 | -0,009568 | 24 | 1 |
| | | | | | |
| MOYENNE | | -0,00244772 | -0,004967 | | |
| Ecart maximal | | 0,007457 | 0,009884 | | |

**Tableau F.1** : Résultat du MSR pour la corrélation de deux images identiques.

aux variations de la répartition de l'intensité lumineuse dans le plan observé. Elle se traduit donc par un signal bidimensionnel. Le déplacement entre deux zones d'étude s'apparente alors à un décalage entre deux signaux bidimensionnels. En prenant une arche sinusoïdale, discrétisée sur 16 pixels, comme signal et en décalant celle-ci d'un demi-pixel, Hild et al. (Hild et al., 1999) trouvent que l'écart absolu entre la solution exacte et le calcul numérique ne dépasse pas quatre centièmes de pixel.

Cette imprécision de mesure est liée au calcul de l'interpolation au voisinage du maximum de corrélation. Pour réduire cette erreur et augmenter la précision sur la mesure des déplacements, on peut procéder de manière itérative. A partir de la première estimation du déplacement, le signal de l'image déformée peut être décalé de l'opposé du déplacement trouvé. Un calcul de la fonction d'intercorrélation est alors effectué de nouveau entre l'image de référence et l'image déformée décalée, jusqu'à l'estimation du nouveau déplacement. La méthode est réitérée tant que l'incrément de déplacement reste supérieur à la précision choisie (par exemple, un centième de pixel). Cette méthode itérative s'apparente à la méthode de la $C_s$ adaptative. Elle n'est pas employée dans cette thèse. On peut la retrouver dans des logiciels du commerce tels que Correli$^{2D}$.

Pour un facteur d'échelle de 150 $\mu$m/pixel, une erreur maximale de 6 $\mu$m est donc commise sur l'appréciation des déplacements.

| FICHIER .DEP | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Coordonnées en pixels | | Déplacements en pixels | | Numéro du nœud | Taux de corrélation |
| X | Y | Ux | Uy | | |
| 555 | 423 | 0,020252 | 0,004239 | 0 | 0,999344 |
| 560 | 423 | 0,028257 | 0,008882 | 1 | 0,999213 |
| 565 | 423 | 0,020661 | 0,006918 | 2 | 0,999191 |
| 570 | 423 | 0,020642 | 0,0102 | 3 | 0,999152 |
| 575 | 423 | 0,033084 | 0,006524 | 4 | 0,999219 |
| 580 | 423 | 0,02875 | 0,001154 | 5 | 0,999356 |
| 585 | 423 | 0,02524 | 0,002687 | 6 | 0,999362 |
| 590 | 423 | 0,025906 | -0,00266 | 7 | 0,999349 |
| 595 | 423 | 0,021562 | 0,003811 | 8 | 0,999242 |
| 600 | 423 | 0,024654 | 0,002262 | 9 | 0,999229 |
| 605 | 423 | 0,027288 | -0,000322 | 10 | 0,999243 |
| 610 | 423 | 0,030989 | 0,001387 | 11 | 0,999315 |
| 615 | 423 | 0,027799 | -0,000981 | 12 | 0,999396 |
| 620 | 423 | 0,023267 | 0,004154 | 13 | 0,999386 |
| 625 | 423 | 0,00611 | 0,008362 | 14 | 0,99936 |
| 555 | 428 | 0,023491 | 0,004642 | 15 | 0,999403 |
| 560 | 428 | 0,027529 | 0,010866 | 16 | 0,999279 |
| 565 | 428 | 0,021932 | 0,007848 | 17 | 0,999259 |
| 570 | 428 | 0,021763 | 0,008954 | 18 | 0,999203 |
| 575 | 428 | 0,033709 | 0,008046 | 19 | 0,999228 |
| 580 | 428 | 0,034074 | 0,003944 | 20 | 0,999348 |
| 585 | 428 | 0,023024 | 0,007608 | 21 | 0,999369 |
| 590 | 428 | 0,023376 | 0,005714 | 22 | 0,999345 |
| 595 | 428 | 0,015325 | 0,011458 | 23 | 0,999233 |
| 600 | 428 | 0,023866 | 0,008052 | 24 | 0,999226 |
| 605 | 428 | 0,030882 | 0,009388 | 25 | 0,999221 |
| 610 | 428 | 0,033531 | 0,006027 | 26 | 0,999304 |
| 615 | 428 | 0,03783 | 0,000633 | 27 | 0,999386 |
| 620 | 428 | 0,025365 | 0,006352 | 28 | 0,999387 |
| 625 | 428 | 0,005805 | 0,005801 | 29 | 0,999353 |
| | | | | | |
| Ecart maximal en valeur absolu | | 0,03783 | 0,01146 | | |
| MOYENNE | | 0,02487 | 0,00540 | | |

**Tableau F.2** : Résultat du champ de déplacement pour la corrélation de deux images identiques.

Cependant, les erreurs de mesure liées au logiciel de corrélation d'images ne sont pas les seules lors d'un essai photomécanique. Par exemple, des distorsions dues à la qualité des optiques ou provenant d'une mauvaise perpendicularité entre l'axe de la caméra et la surface de l'échantillon entraînent des imprécisions de mesure. Une modification de l'éclairement pendant l'acquisition d'une série d'images est aussi à craindre. En effet, le principe de la corrélation d'images repose sur la conservation de l'intensité lumineuse entre les images. La recherche de la correspondance entre les niveaux de gris de deux images suppose que ces derniers ne changent pas. La section suivante s'intéresse donc à la quantification globale de l'ensemble de ces erreurs.

### b) Erreur liée au montage expérimental et au mode de dépouillement

Afin de quantifier globalement l'ensemble des erreurs commises dans un environnement réel, un essai mécanique est "simulé" expérimentalement. Une éprouvette rectangulaire en mousse de nickel est fixée au seul mors du bas, mors mobile de la machine de traction. L'éprouvette est alors déplacée verticalement, perpendiculairement à l'axe de la caméra. Une image est prise tous les millimètres et le déplacement maximal est de 5 mm. Les images n'ont donc subi qu'un mouvement de solide rigide et aucune déformation.

La corrélation est effectuée sur les points d'une grille, contenant 150 lignes et 31 colonnes. Pour dépouiller les résultats, on propose de soustraire la moyenne du MSR aux déplacements trouvés en chacun des nœuds de la grille. La différence doit être théoriquement nulle.

Le tableau F.3 résume le plus grand écart enregistré entre les déplacements et la moyenne du MSR suivant le mode de dépouillement. Le dépouillement en mode absolu montre que l'erreur commise maximale est du même ordre de grandeur que celle issue de la précision de la corrélation d'images (voir section a), page 251). Elle varie entre 3,5 et 6 centièmes de pixel. Cependant, en mode incrémental, les erreurs se cumulent d'une carte à l'autre. L'incrément d'erreur entre deux images successives est de l'ordre de trois centièmes de pixel. On obtient vite une imprécision importante même si l'incrément d'erreur a tendance à diminuer avec le nombres d'images. Selon Laraba-Abbes (Laraba-Abbes, 1998), l'erreur cumulée évolue comme la racine carrée du nombre d'images. Compte tenu des faibles taux de déformation des mousses de nickel, le mode de dépouillement choisi est le mode absolu.

| Déplacement vertical (mm) | $\lvert Max(DEP - \overline{MSR})\rvert$ (pixel) | |
|---|---|---|
| | Mode absolu | Mode incrémental |
| 1 | 0,0345 | 0,0483 |
| 2 | 0,0592 | 0,0609 |
| 3 | 0,0348 | 0,0963 |
| 4 | 0,0411 | 0,1271 |
| 5 | 0,0599 | 0,1568 |

**Tableau F.3** : Ecart maximal de l'erreur commise lors d'un déplacement vertical de l'éprouvette.

### c) Validation du montage

La méthode de corrélation d'images permet aussi de vérifier la qualité d'un montage. Par exemple, lors d'un test de validation sur des éprouvettes en acier, un serrage non uniforme des mors, au début de l'expérience, a été mis en évidence. Pour l'occasion, des mors auto-serrants ont été employés. Les champs de déplacement obtenus avec les mors auto-serrants montrent des iso-déplacements $U_x$ et $U_y$ à 45°de la direction de sollicitation (voir figure F.5). Les mors auto-serrants n'appliquent pas une pression uniforme sur la surface de l'éprouvette en contact. L'éprouvette glisse du côté du mors où elle est libre et est maintenue de l'autre côté du mors. L'éprouvette tourne en même temps que la traction s'exerce.

Les essais ont été repris avec un mors où la surface en contact est maintenue par une vis centrale. On retrouve alors des champs de déplacement $U_x$, parallèles à la direction de sollicitation, et des champs de déplacement $U_y$, perpendiculaires à la direction de sollicitation (voir figure F.5).

*Remarque : la solution d'un serrage avec deux vis de chaque côté du mors a été testée puis abandonnée. En effet, un serrage identique sur les deux vis est difficile à reproduire pour tous les essais.*

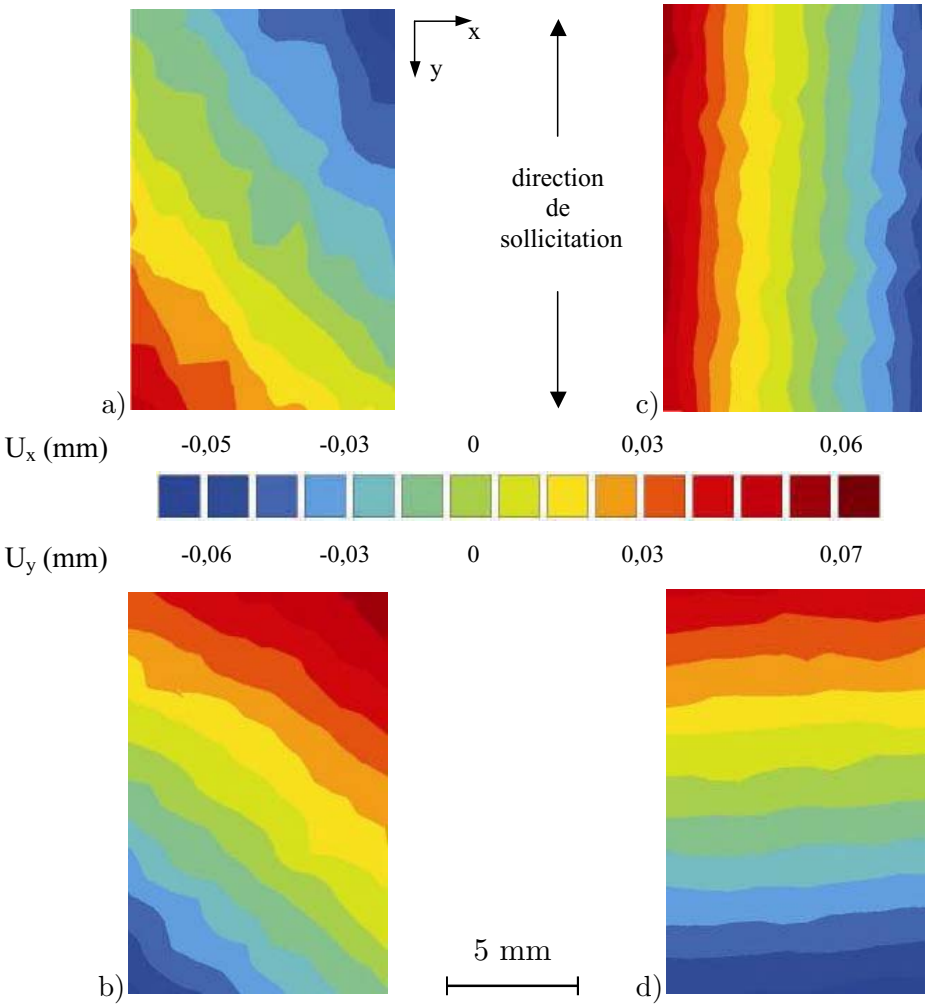



**Figure F.5** : Comparaison des champs de déplacement : a) $U_x$ (mors auto-serrants), b) $U_y$ (mors auto-serrants), c) $U_x$ (mors à vis centrale), d) $U_y$ (mors à vis centrale).

### F.3.2 Effet tridimensionnel des mousses

La mousse de nickel est une structure cellulaire, composée de brins interconnectés entre eux. Au cours de la déformation de la mousse, les brins se réorientent et ne restent pas dans le plan de la surface observée. Or, cette composante hors-plan engendre des artefacts de mesure.

*Remarque : ces effets hors-plan peuvent aussi être créés à partir d'un mauvais alignement de l'éprouvette ou des variations d'épaisseur de la surface observée.*

Deux tests sont réalisés pour quantifier l'effet tridimensionnel de la structure des mousses sur la mesure des déplacements :

- la distance caméra/éprouvette est réduite ;
- l'éprouvette est tournée autour de l'axe de traction.

Ces tests sont réalisés sans déformation de l'éprouvette. Cependant, en assimilant le comportement d'un brin lors d'un essai de traction au mouvement d'ensemble de la mousse lors des tests de validation, les essais décrits dans cette section permettent d'avoir une idée sur les déformations locales engendrées par le rapprochement ou la rotation d'un brin individuel.

### a) Effet de "zoom/dézoom"

Lorsqu'un objet est approché de la caméra, il apparaît plus grand. Sa déformation apparente suivant l'axe horizontal est identique à celle suivant l'axe vertical. La surface observée de l'éprouvette subit donc une iso-dilatation ou une iso-contraction (si la distance entre la caméra et l'échantillon est augmentée).

Dans notre cas, l'éprouvette est avancée vers la caméra, perpendiculairement à l'axe optique de celle-ci. Des images de la surface de l'éprouvette sont prises dans trois positions : à 1, 2 et 3 mm de sa position initiale. L'objectif de cet essai est d'avoir un ordre d'idée des valeurs des déformations apparentes, engendrées par la perte de focalisation et le phénomène de "zoom/dézoom", en fonction du facteur d'échelle.

Le tableau F.4 représente la déformation apparente engendrée par l'avancée de 1 mm de l'éprouvette vers la caméra en fonction du facteur d'échelle. La quasi-totalité de la surface de l'éprouvette est utilisée pour la corrélation d'images. La moyenne des déformations est réalisée sur l'ensemble de cette zone. Les valeurs maximale et minimale sont celles rencontrées dans toute la zone.

Sur ce tableau, il apparaît que les déformations trouvées par corrélation d'images sont en accord avec celles de la théorie. Les déformations axiales et transverses sont égales tandis que les déformations de cisaillement sont quasi-nulles. En outre, plus la résolution est grossière et plus la déformation apparente, engendrée par une avancée de 1 mm, est faible. Pour un facteur d'échelle de l'ordre de 150 $\mu$m/pixel, une avancée de 1 mm crée une déformation de 0,1 %.

| AVANCEE 1mm | | Moyenne | Maximum | Minimum | "Théorie" | Erreur relative |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 56 | epsilon xx | 0,00180577 | 0,001895 | 0,001708 | 0,00152672 | 0,182780987 |
| | epsilon yy | 0,00181843 | 0,001966 | 0,001644 | | 0,191070012 |
| | epsilon xy | 3,2162E-06 | 0,000059 | -0,000093 | 0 | |
| 77 | epsilon xx | 0,00157701 | 0,001718 | 0,001496 | 0,0013624 | 0,157526822 |
| | epsilon yy | 0,00161905 | 0,00178 | 0,00133 | | 0,188383053 |
| | epsilon xy | -9,1346E-06 | 0,000113 | -0,000126 | 0 | |
| 103 | epsilon xx | 0,00139148 | 0,001541 | 0,001257 | 0,00122699 | 0,134058779 |
| | epsilon yy | 0,00144439 | 0,001809 | 0,001085 | | 0,177178316 |
| | epsilon xy | 9,4074E-06 | 0,000189 | -0,000197 | 0 | |
| 125 | epsilon xx | 0,00111799 | 0,00123 | 0,000962 | 0,00110011 | 0,016249197 |
| | epsilon yy | 0,00123417 | 0,001665 | 0,000858 | | 0,121859634 |
| | epsilon xy | 7,0507E-06 | 0,000214 | -0,000216 | 0 | |
| 148 | epsilon xx | 0,00119838 | 0,001397 | 0,000974 | 0,00101729 | 0,178009724 |
| | epsilon yy | 0,00111401 | 0,001719 | 0,000255 | | 0,095068553 |
| | epsilon xy | 9,0889E-07 | 0,000246 | -0,000201 | 0 | |
| 256 | epsilon xx | 0,00060524 | 0,004242 | -0,003564 | 0,00068074 | 0,110906995 |
| | epsilon yy | 0,00067969 | 0,006784 | -0,004842 | | 0,001542241 |
| | epsilon xy | -8,9644E-05 | 0,003019 | -0,003748 | 0 | |
| 395 | epsilon xx | 0,00010638 | 0,010801 | -0,009037 | 0,0004531 | 0,765229226 |
| | epsilon yy | 0,00076127 | 0,013906 | -0,0104 | | 0,680113234 |
| | epsilon xy | -0,00025998 | 0,008306 | -0,00577 | 0 | |

**Tableau F.4** : Déformations apparentes en fonction du facteur d'échelle pour une avancée de 1 mm de l'éprouvette vers la caméra.

On peut remarquer que l'écart entre les déformations apparentes théoriques et celles issues de la corrélation d'images est du même ordre de grandeur que l'erreur commise par le logiciel de corrélation. A partir des paramètres de la corrélation d'images, la longueur de jauge $L_j$ s'exprime par :

$$L_j = 2G_sN_s + C_s \tag{F.3}$$

Dans le tableau F.5, les paramètres de la corrélation d'images pour chaque facteur d'échelle sont reportés. En considérant une incertitude de quatre centièmes de pixel sur la mesure des déplacements, on trouve une imprécision sur la valeur des déformations de l'ordre de 0,03 % (pour les facteurs d'échelle de 56 à 148 $\mu$m), ce qui correspond à la différence observée au tableau F.4. Cependant, les incertitudes relevées pour les facteurs d'échelle 256 et 395 $\mu$m/pixel sont beaucoup plus importantes que 0,11 et 0,16 %. Cette détérioration de la corrélation peut s'expliquer par le nombre réduit de nuances en niveaux de gris que contiennent les images pour ces deux résolutions.

| Facteur d'échelle ($\mu$m/pixel) | $G_s$ (pixel) | $N_s$ (points de la grille) | $C_s$ (pixel) | $L_j$ (pixel) | Incertitude sur la déformation (%) |
|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 15 | 5 | 30 | 180 | 0,022 |
| 77 | 15 | 5 | 30 | 180 | 0,022 |
| 103 | 10 | 5 | 30 | 130 | 0,031 |
| 125 | 10 | 5 | 30 | 130 | 0,031 |
| 148 | 8 | 5 | 30 | 110 | 0,036 |
| 256 | 1 | 5 | 25 | 35 | 0,114 |
| 395 | 1 | 5 | 15 | 25 | 0,16 |

**Tableau F.5** : Incertitude sur la déformation en fonction des paramètres de corrélation choisis.

Les résultats des corrélations pour les deux autres positions (2 et 3 mm) ont les mêmes caractéristiques que celles de l'avancée de 1 mm (Dillard et al., 2002). De plus, ils confirment que la déformation apparente varie linéairement avec la distance caméra/éprouvette.

### b) Rotation de l'éprouvette par rapport à l'axe de traction

Les déformations engendrées par la rotation de l'éprouvette par rapport à l'axe de traction sont quantifiées. Ces rotations hors-plan sont gênantes pour les objectifs à faibles focales car elle provoque des effets de "zoom/dézoom". Une solution pour réduire la sensibilité hors-plan de la caméra est d'utiliser des objectifs télécentriques car ces objectifs ne sélectionnent que les rayons issus de l'objet parallèlement à l'axe optique. L'objectif télécentrique du Centre des Matériaux n'a pas été utilisé car il possède une résolution de 60 $\mu$m, inférieure à celle choisie pour l'étude des mousses (voir section F.4).

Des photographies de la surface de l'éprouvette sont prises aux angles 0°, 5° et 10° pour deux résolutions (50 et 150 $\mu$m/pixel). Les déformations sont dépouillées suivant une ligne parallèle à l'axe de traction. La moyenne des déformations, réalisée sur la ligne verticale, est donnée dans le tableau F.6.

| | | 50 $\mu$m/pixel | | 150 $\mu$m/pixel | |
|---|---|---|---|---|---|
| Angle $\theta$ (°) | Théorie ($\varepsilon = 1 - cos\theta$) | Moyenne | Ecart-type | Moyenne | Ecart-type |
| -5 | | | | 0,0022 | 0,0009 |
| 5 | -0,0038 | -0,0035 | 0,001 | -0,0028 | 0,0021 |
| 10 | -0,0152 | -0,0140 | 0,002 | -0,0151 | 0,0038 |

**Tableau F.6** : Déformations moyennes lors d'une rotation d'un angle $\theta$ de l'éprouvette.

A partir du tableau F.6, on constate que les déformations trouvées expérimentalement sont en accord avec la théorie. Une rotation de l'éprouvette de 5° entraîne une déformation apparente de 0,4 % tandis qu'une rotation de 10° engendre des déformations de 1,5 %.

En conclusion de cette section, nous pouvons dire que les effets de "zoom–dézoom" et des rotations (pour des angles petits) sont faibles. Toutefois, pour limiter les variations de niveaux de gris lors du mouvement des brins, une couche de graphite est pulvérisée sur la surface de la mousse afin de rendre celle-ci moins brillante. Cette précaution est prise pour chaque essai.

### F.3.3 Comparaison avec un autre logiciel de corrélation et un autre matériau

#### a) Comparaison avec l'Ecole des Mines d'Albi

Une série d'images, d'un essai de traction sur les mousses de nickel, a été envoyée à l'Ecole des Mines d'Albi pour comparer les résultats obtenus avec un autre logiciel de corrélation. A l'Ecole des Mines d'Albi, l'équipe de Jean-José Orteu est spécialisée dans la corrélation d'images stéréoscopiques. Cette technique permet d'identifier la composante hors-plan du vecteur déplacement à partir d'un couple d'images, issu de deux caméras. Toutefois, l'étude de la composante hors-plan n'est pas le propos de cette section. Le logiciel de l'Ecole des Mines d'Albi est utilisé en logiciel de corrélation d'images "classique". Il ne compare donc pas des paires d'images entre elles mais simplement, une seule image avec une autre.

La figure F.6 représente les profils de déplacements pour une ligne horizontale de l'éprouvette issus des deux logiciels de corrélation. On peut voir sur cette figure que les profils ont la même allure. De plus, l'écart entre les déplacements, enregistré pour tous les points de la grille (1462 points) est de l'ordre de l'erreur commise par le logiciel de corrélation. La moyenne de ces écarts est de quatre centièmes de pixel et l'écart-type est de trois centièmes de pixel.

A titre d'exemple visuel, deux champs de déformation, dépouillés à l'Ecole des Mines d'Albi et de Paris, sont donnés sur la figure F.7. Ces cartographies proviennent du début de l'essai de traction pour un faible taux de déformation axiale macroscopique (de l'ordre de 0,9 %). A l'aide de ces cartographies, on peut remarquer que les extrema semblent plus marqués pour le logiciel de corrélation CinEMA que pour celui de l'Ecole des Mines d'Albi. Ceci s'explique par la manière de calculer les déformations et par le choix des dimensions du pavé d'approximation (paramètre $N_s$). Plus la taille du pavé d'approximation est grande, plus le champ des déformations est lissé.

*Attention, les couleurs des palettes ne sont pas distribuées de la même manière pour les deux cartographies.*

#### b) Eprouvette en tôle d'acier recouverte de zinc

Des essais sur une éprouvette en acier sont aussi réalisés. Leur objectif est de valider la méthode de corrélation d'images et de voir, sur un matériau réel homogène, l'importance des imprécisions de mesure. Des capteurs, de mesure d'allongement et de contractions latérales, sont positionnés sur l'éprouvette. Ils permettent la comparaison de la déformation globale issue de l'extensométrie classique avec celle de l'extensométrie sans contact. Les éprouvettes en acier revêtues de zinc polycristallin ont une forme en "os de chien". Elles possèdent une longueur utile de 80 mm, une largeur de 12,5 mm et une épaisseur de 0,7 mm. Toutes les éprouvettes sont recouvertes de poudre de graphite pour permettre la corrélation d'images.

Les champs de déformations axiale et transverse sont donnés sur la figure F.8 pour une déformation globale de 6 %. Sur cette figure, la déformation apparaît homogène. Les variations maximales de la déformation sont de l'ordre du pourcent (±1 %) par rapport à la déformation moyenne.

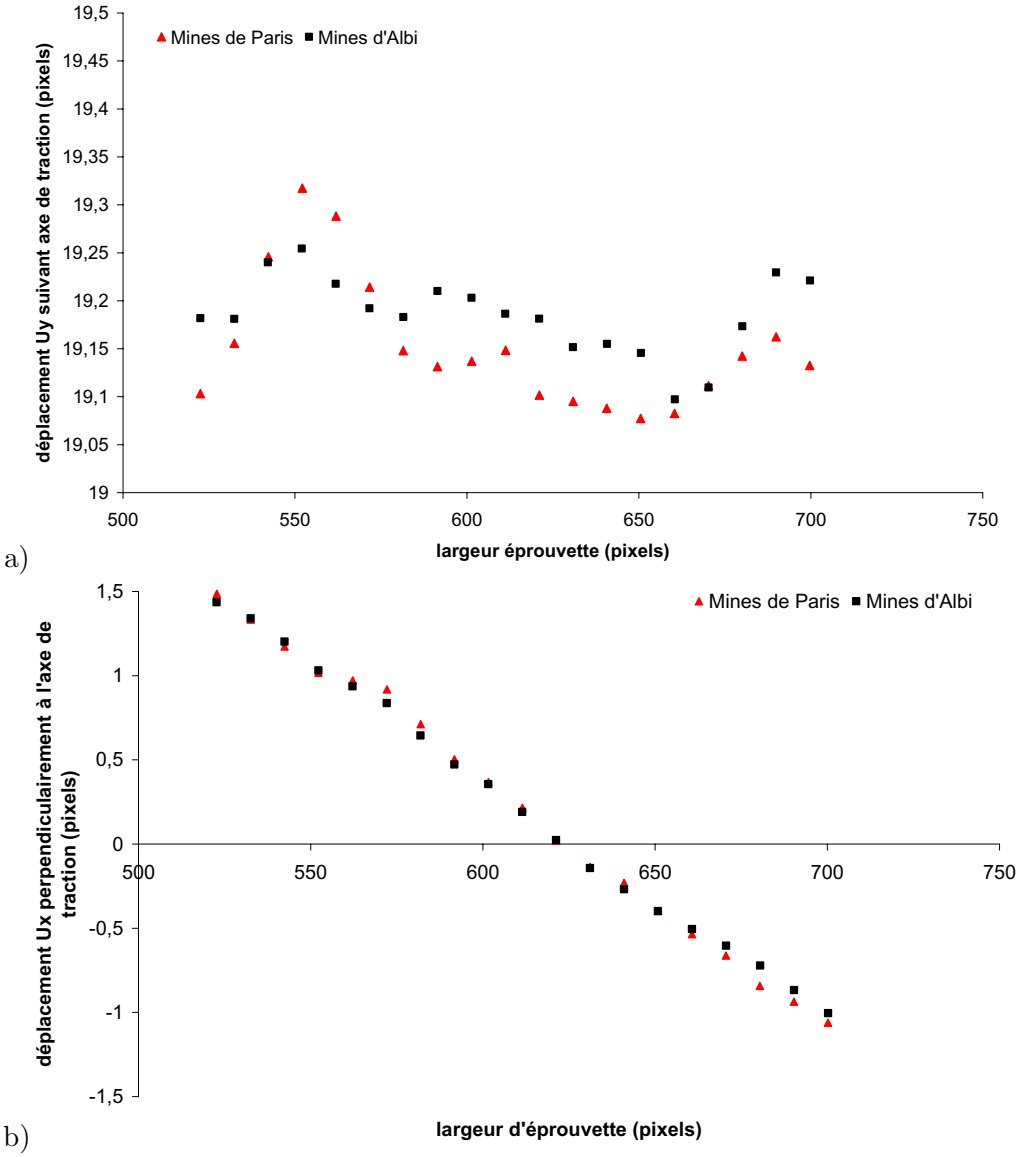



**Figure F.6** : Déplacements le long d'une ligne horizontale (traction dans la direction verticale) : a) suivant l'axe vertical ($U_y$), b) suivant l'axe horizontal ($U_x$).

La déformation moyenne est du même ordre de grandeur que la déformation globale de l'éprouvette. Aucune bande de localisation de la déformation n'est visible.

A partir du logiciel de corrélation d'images, un écart de 1 % est donc enregistré sur la déformation d'un matériau réel homogène lorsque celui-ci se déforme de 6 %. Cet écart reste du même ordre de grandeur pendant tout l'essai.

## F.4 Choix d'une résolution d'étude

L'obtention des champs de déformation à l'aide d'un logiciel de corrélation d'images nécessite une réflexion préalable sur l'échelle d'observation. Le choix du facteur d'échelle est conditionné par les hétérogénéités du matériau. En effet, si la longueur caractéristique des hétérogénéités d'un matériau se situe autour de 50 $\mu$m, une résolution "grossière" de 300 $\mu$m/pixel ne permet pas de les retranscrire. Toute l'information

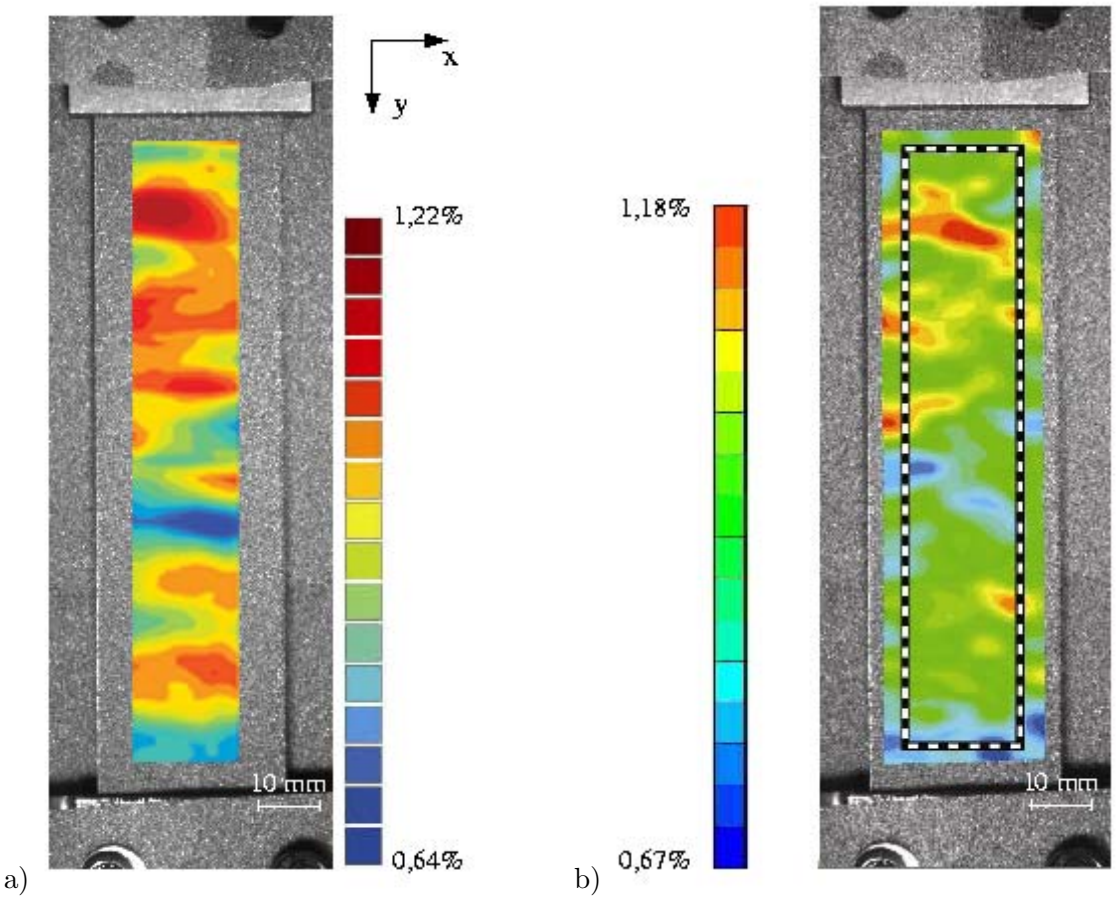



**Figure F.7** : Champ de déformation axiale : a) Ecole des Mines de Paris, b) Ecole des Mines d'Albi.

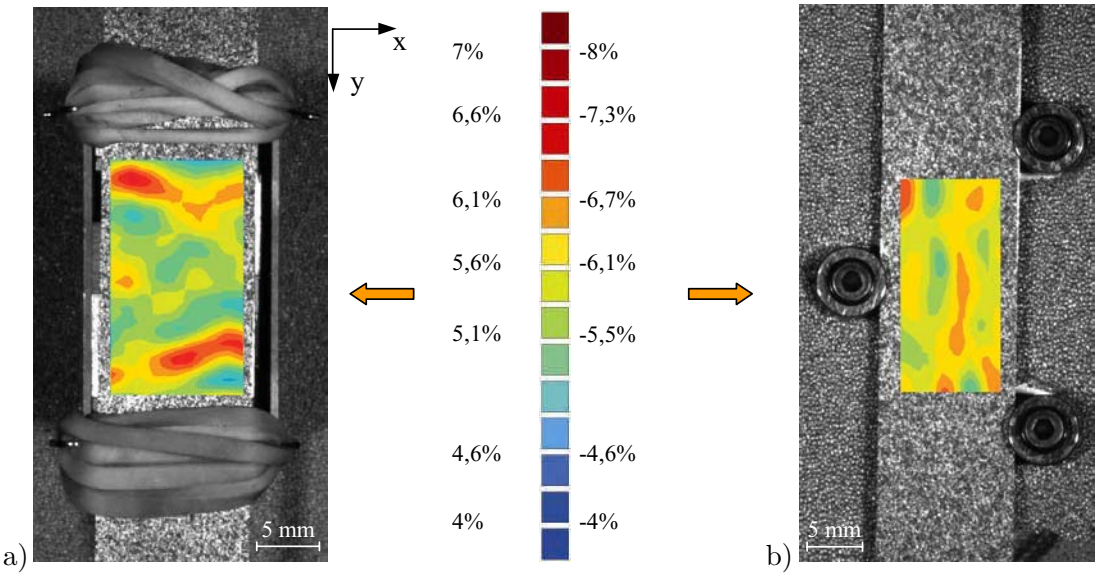



**Figure F.8** : Champs de déformations d'une éprouvette en tôle d'acier : a) déformations axiales (6 % déformation globale), b) déformations transverses (6 % de déformation globale).

contenue dans une zone de $300 \times 300$ (pixels)$^2$ n'est représentée que par un seul niveau de gris. Le matériau peut donc apparaître homogène sous une certaine échelle et hétérogène à une échelle plus fine.

Pour nous guider dans le choix d'une résolution d'observation dans le cas des mousses, des essais de traction sont réalisés avec différents facteurs d'échelle. Une large gamme des facteurs d'échelle est obtenue grâce à l'utilisation de plusieurs objectifs (voir tableau F.7).

| Type d'objectif | 200 mm (TAMRON) + zoom à soufflets | 35-70 mm (NIKON) | 18-28 mm (TOKURA) |
|---|---|---|---|
| Facteur d'échelle ($\mu$m/pixel) | 15 (minimum) | 55 à 400 | 500 à 700 |

**Tableau F.7** : Facteurs d'échelle pour les différents objectifs.

Dans cette section, deux aspects sont envisagés :

1. quelle est l'influence de la résolution d'observation des mousses sur les champs de déformation obtenus ?
2. est-il possible de retrouver le champ de déformation issu d'une résolution grossière à partir d'une résolution plus fine ?

### F.4.1 Influence du facteur d'échelle

La figure F.9 montre les champs de déformation $\varepsilon_{yy}$ ($y$ : axe de traction) pour les différents facteurs d'échelle employés. La déformation globale moyenne est de l'ordre de 3 %. Pour toutes ces cartes de déformation, les mêmes paramètres de dépouillement sont choisis. Elles ont toutes le même pas de grille ($G_s$=1) et la même taille de pavé d'approximation en nombre de points de grille ($N_s$=5). Les dimensions des champs de déformation dépouillés par rapport à la largeur de l'éprouvette sont représentées sur la figure F.9.

A une échelle très fine de 16 $\mu$m/pixel, le champ des déformations montre d'importantes fluctuations entre deux nœuds voisins. Des déformations négatives sont mêmes enregistrées ! Ces fluctuations s'atténuent pour des facteurs d'échelle plus élevés.

Pour avoir une idée plus quantitative du phénomène, les déformations $\varepsilon_{yy}$ et $\varepsilon_{xx}$ sont tracées suivant des profils horizontaux de quatre éprouvettes différentes (voir figure F.10). Chaque éprouvette correspond à un essai de traction sur le même type de mousse avec une résolution d'étude différente. Les champs de déformation sont pris pour la même déformation axiale moyenne de 3 %. Seuls les dix premiers millimètres (longueur maximale de la zone de corrélation de 16 $\mu$m/pixel) sont considérés pour tous les profils. Ces profils confirment que les variations de déformation diminuent lorsque le facteur d'échelle augmente. Or, tous les calculs des déformations s'appuient sur le même nombre des points (même statistique) et sur la même incertitude (même longueur de jauge réduite $L_j^* = 2G_sN_s$), seule la surface représentative du pavé d'approximation sur l'éprouvette diffère. Le profil très oscillant de la résolution 16 $\mu$m/pixel s'explique donc par la prédominance des effets tridimensionnels des brins de la mousse.
Les fluctuations sont le résultat de deux contributions :

1. la résolution de 16 $\mu$m/pixel est suffisamment faible pour percevoir le mouvement des brins ;
2. le pavé d'approximation de 160 $\mu$m n'est pas assez important pour lisser les fluctuations des mouvements des brins.

L'effet tridimensionnel du mouvement des brins est atténué à partir de la résolution de 136 $\mu$m/pixel pour un pavé d'approximation de 1,36 mm de côté (environ 3 cellules).

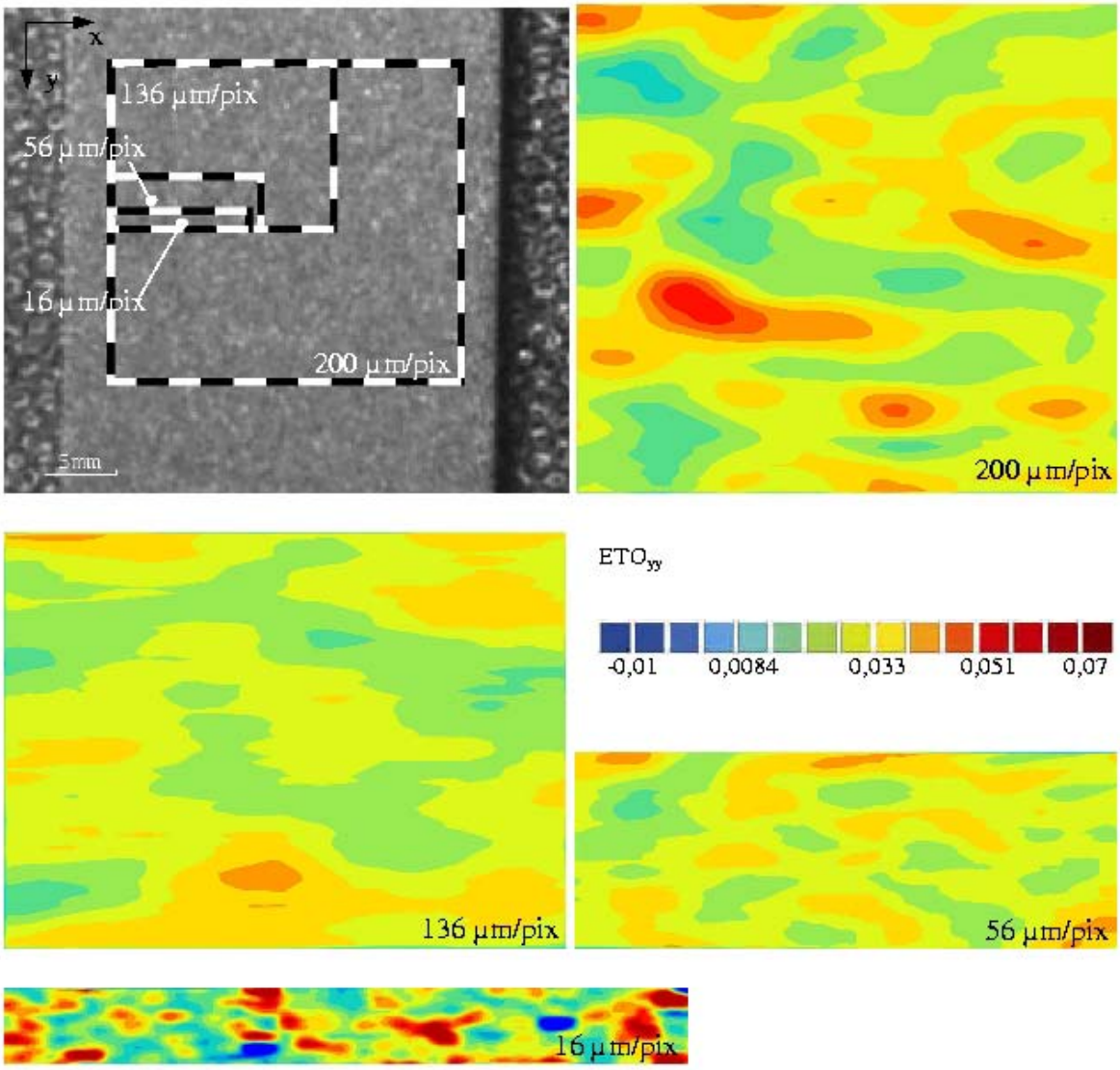



**Figure F.9** : Champs de déformations $\varepsilon_{yy}$ en fonction du facteur d'échelle ($G_s$=1, $N_s$=5).

### F.4.2 Influence du pavé d'approximation

La section précédente a montré que les mousses de nickel présentent des variations de la déformation qui augmentent avec la diminution facteurs d'échelle. Cependant, la zone de calcul des déformations ne représentait pas la même surface de l'éprouvette.

L'objectif de cette section est donc de connaître l'influence de la taille du pavé d'approximation et de voir s'il est possible d'obtenir les mêmes déformations avec deux résolutions différentes pour une même surface représentative du pavé d'approximation. Pour cela, trois méthodes sont proposées :

- augmentation du pas de la grille $G_s$ en gardant le nombre de pas $N_s$ constant ;
- augmentation du nombre de pas $N_s$ en conservant le pas de la grille $G_s$ ;
- changement de la résolution de l'image par moyennation des niveaux de gris.

On choisit d'essayer de retrouver le comportement de la résolution 136 $\mu$m/pixel ($G_s$=1, $N_s$=5) à partir de la résolution de 16 $\mu$m/pixel.

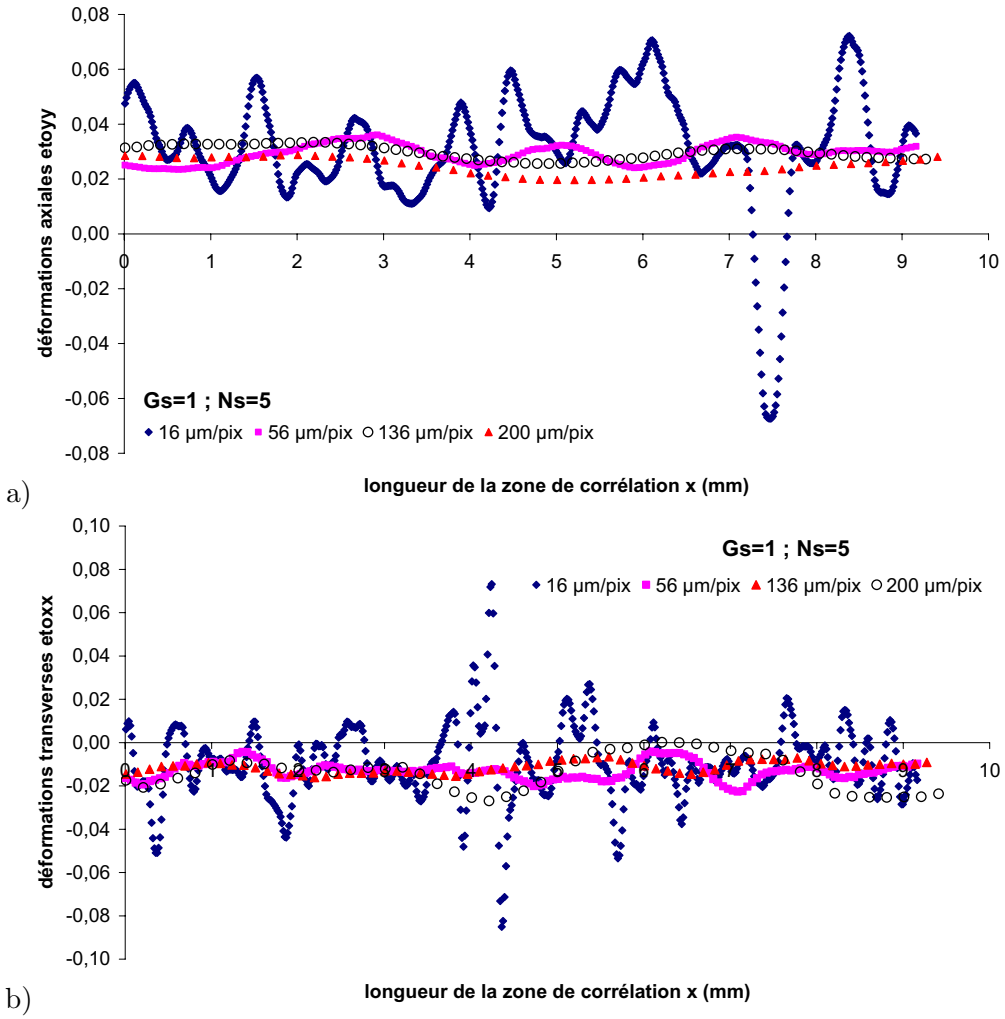



**Figure F.10** : Champs de déformation le long d'une ligne horizontale pour différentes résolutions – $G_s$=1, $N_s$=5 : a) $\varepsilon_{yy}$ (déformation axiale moyenne autour de 3 %), b) $\varepsilon_{xx}$.

### a) Augmentation du pas de la grille $G_s$

En choisissant un pas de grille de 8 pixels pour la résolution de 16 $\mu$m/pixel, les points de la grille sont espacés de 128 $\mu$m. Cette situation est donc équivalente à celle d'un pas de grille de 1 pixel pour une résolution de 136 $\mu$m/pixel, si ce n'est que les informations contenues dans chaque pixel sont plus locales.

La figure F.11 montre les profils horizontaux des déformations $\varepsilon_{yy}$ et $\varepsilon_{xx}$ pour des surfaces de calcul des déformations équivalentes. On constate que l'amplitude et la périodicité des variations des déformations sont du même ordre pour les résolutions de 16 et 136 $\mu$m/pixel. Les valeurs des déformations ne sont pas les mêmes car elles ne correspondent pas au même essai. Cependant, les longueurs d'onde des variations sont similaires. Ceci prouve que les effets tridimensionnels des mousses sont du second ordre par rapport à la taille de la zone de calcul des déformations.

### b) Augmentation du nombre de pas $N_s$

Au lieu de modifier le pas de la grille, il est possible d'obtenir la même surface représentative du pavé d'approximation en changeant le nombre de pas $N_s$. En choisissant un nombre de pas de 40 et en gardant un pas de grille de 1 (pour la résolution de 16 $\mu$m/pixel), la surface de calcul des déformations est

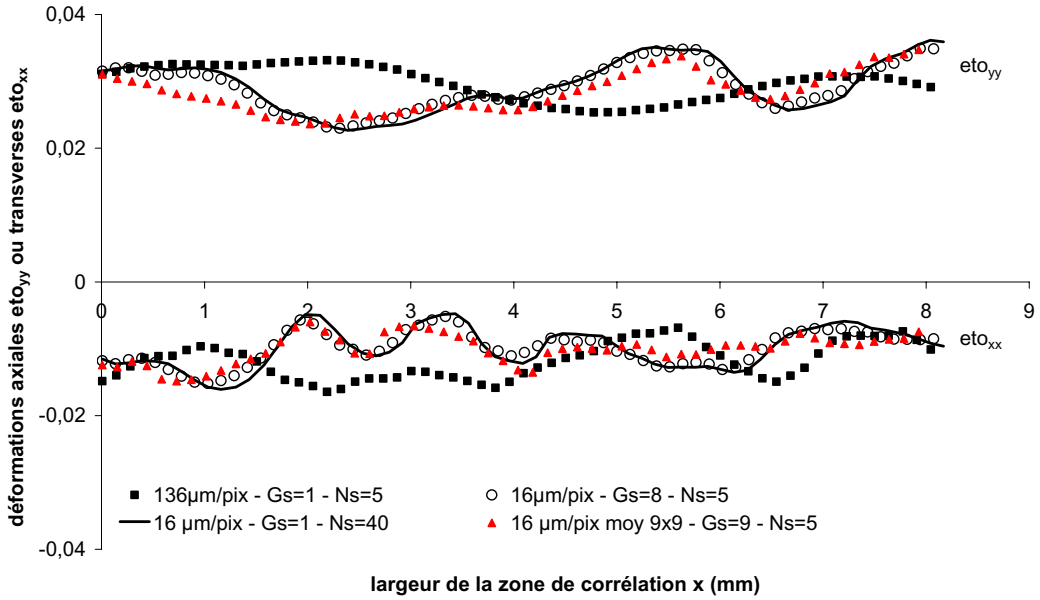



**Figure F.11** : Champs de déformation pour des profils horizontaux et pour des surfaces de calcul des déformations équivalentes.

équivalente à celle de la résolution 136 $\mu$m/pixel pour le couple ($G_s$=1, $N_s$=5) ou à celle de la résolution de 16 $\mu$m/pixel pour le couple ($G_s$=8, $N_s$=5).

La figure F.11 montre les profils horizontaux des déformations $\varepsilon_{yy}$ et $\varepsilon_{xx}$ pour la même résolution de 16 $\mu$m/pixel et la même surface de calcul des déformations. On constate que, modifier le pas de la grille ou le nombre de pas est identique. Le même profil de déformation est obtenu dans les deux cas. Cela confirme aussi que les effets tridimensionnels des mousses sont du second ordre par rapport à la taille de la zone de calcul des déformations.

### c) Moyennation des niveaux de gris

Au lieu d'essayer de moyenner le calcul des champs de déformation, on peut effectuer cette opération, en amont, directement sur les niveaux de gris des images. Une moyenne $9 \times 9$ est réalisée sur chaque image source de résolution 16 $\mu$m/pixel. La moyenne des niveaux de gris de ces 80 pixels voisins est associée à chaque pixel. Le pixel reçoit donc l'information de 144 $\mu$m de la surface réelle. On obtient des images avec un facteur d'échelle "artificiel" de 144 $\mu$m/pixel.

Pour éviter la superposition des informations dans l'image de résolution "artificielle" de 144 $\mu$m/pixel, on choisit un pas de grille de 9. Cela correspond à un pas de grille de 1 pour la résolution de 136 $\mu$m/pixel.

La figure F.11 montre l'évolution des profils horizontaux de déformation obtenus à partir des images moyennées. On peut voir sur la figure F.11 que tous les profils sont semblables.

En résumé, on peut dire que les effets tridimensionnels des mousses sont marqués pour de faibles facteurs d'échelle. Toutefois, ces effets sont du second ordre par rapport à la taille "réelle" de la zone de calcul des déformations. Pour des résolutions plus fines, il est possible de retrouver le même champ de déformation en augmentant la surface représentative réelle du pavé d'approximation ou en moyennant les niveaux de gris des images sources.

Dans le cadre de cette thèse, l'utilisation des essais photomécaniques a pour but de repérer les hétérogénéités de déformation à l'échelle de la cellule et de confronter les champs de déformation expérimentaux avec ceux d'un modèle continu. On ne cherche donc pas à connaître les mouvements individuels des brins mais, le mouvement d'ensemble des cellules. Même s'il est possible de prendre une résolution de 16 $\mu$m/pixel et de moyenner sur une zone de dimensions adéquates, une résolution de 136 $\mu$m/pixel est préférable. Elle permet aussi de limiter les effets tridimensionnels de la mousse. C'est cette résolution qui a été choisie pour décrire le comportement mécanique des mousses. Une cellule est donc décrite par environ trois pixels.

# Annexe G

# Expressions des contractions latérales lors d'un essai de traction simple – Modèle de plasticité continu compressible anisotrope

Le critère du modèle plastique anisotropie compressible choisi s'écrit :

$$f(\underset{\sim}{\sigma}, \sigma_y) = \sigma_{eq} - \sigma_y \tag{G.1}$$

avec

$$\sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2} \; C \; \underset{\sim}{\sigma}^{\text{dev}} : \underset{\approx}{\mathbf{H}} : \underset{\sim}{\sigma}^{\text{dev}} + F \; (\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\sigma})^2 \right)^{1/2}$$

Soit $H_a$, $H_b$, $H_c$, $H_d$, $H_e$, $H_f$, les composantes du tenseur de Hill telles que :

$$\underset{\approx}{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} H_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_f \end{pmatrix} \tag{G.2}$$

Soit $P$, $Q$, $R$, les composantes de la matrice $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ telles que :

$$\underset{\sim}{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \tag{G.3}$$

## G.1 Sollicitation suivant l'axe 1

En traction simple suivant la direction 1, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{G.4}$$

Le déviateur des contraintes a donc pour expression :

$$\underset{\sim}{\sigma}^{\text{dev}} = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{3} \end{pmatrix} \tag{G.5}$$

Ce qui donne :

$$\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{H}}} : \underset{\sim}{\sigma}^{\text{dev}} = \frac{\sigma}{3} \begin{pmatrix} 2H_a & 0 & 0 \\ 0 & -H_b & 0 \\ 0 & 0 & -H_c \end{pmatrix} \tag{G.6}$$

D'où :

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\sigma}^{\text{dev}} : \underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{H}}} : \underset{\sim}{\sigma}^{\text{dev}} = \dfrac{\sigma^2}{9} \left(4H_a + H_b + H_c\right) \\ \left(\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\sigma}\right)^2 = P^2\sigma^2 \end{cases} \tag{G.7}$$

Il en résulte que :

$$\boxed{\sigma_{eq} = \sigma \left( \frac{C}{6} \left(4H_a + H_b + H_c\right) + FP^2 \right)^{1/2}} \tag{G.8}$$

Exprimons maintenant la direction d'écoulement $\underset{\sim}{\mathbf{N}} \left( = \dfrac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \right)$ à partir de la loi d'écoulement plastique $\left(\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \dot{p}\, \underset{\sim}{\mathbf{N}}\right)$ pour en déduire les vitesses de déformations plastiques.

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{1}{2\sigma_{eq}} \left( \frac{3}{2}\, C\, \frac{\partial \left( \underset{\sim}{\sigma}^{\text{dev}} : \underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{H}}} : \underset{\sim}{\sigma}^{\text{dev}} \right)}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} + 2\, F\, \left( \underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\sigma} \right) \frac{\partial \left( \underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\sigma} \right)}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \right) \tag{G.9}$$

avec

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \left( \underset{\sim}{\sigma}^{\text{dev}} : \underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{H}}} : \underset{\sim}{\sigma}^{\text{dev}} \right)}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = 2 \left( \underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{H}}} : \underset{\sim}{\sigma}^{\text{dev}} \right)^{\text{dev}} \\ \dfrac{\partial \left( \underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\sigma} \right)}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \underset{\sim}{\mathbf{P}} \end{cases} \tag{G.10}$$

D'où :

$$\underset{\sim}{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sigma_{eq}} \left( \frac{3}{2}\, C\, \left( \underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{H}}} : \underset{\sim}{\sigma}^{\text{dev}} \right)^{\text{dev}} + F\, \left( \underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\sigma} \right) \underset{\sim}{\mathbf{P}} \right) \tag{G.11}$$

Or,

$$\left(\underset{\sim}{\mathbf{H}} : \underset{\sim}{\sigma}^{\text{dev}}\right)^{\text{dev}} = \frac{\sigma}{9}\begin{pmatrix} 4H_a + H_b + H_c & 0 & 0 \\ 0 & -2H_a - 2H_b + H_c & 0 \\ 0 & 0 & -2H_a + H_b - 2H_c \end{pmatrix} \tag{G.12}$$

Donc

$$\underset{\sim}{\mathbf{N}} = \frac{1}{\left(\frac{C}{6}\left(4H_a + H_b + H_c\right) + FP^2\right)^{1/2}}\ \underset{\sim}{\mathbf{A}} \tag{G.13}$$

$$\text{avec } \underset{\sim}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{C}{6}\left(4H_a + H_b + H_c\right) + FP^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C}{6}\left(-2H_a - 2H_b + H_c\right) + FPQ & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C}{6}\left(-2H_a + H_b - 2H_c\right) + FPR \end{pmatrix}$$

A partir des formules ci-dessus, on peut en déduire l'expression des contractions latérales plastiques $\nu_{12}^p$ et $\nu_{13}^p$.

$$\boxed{\nu_{12}^p = -\frac{C\left(H_c - 2H_a - 2H_b\right) + 6FPQ}{C\left(4H_a + H_b + H_c\right) + 6FP^2}} \tag{G.14}$$

$$\boxed{\nu_{13}^p = -\frac{C\left(H_b - 2H_a - 2H_c\right) + 6FPR}{C\left(4H_a + H_b + H_c\right) + 6FP^2}} \tag{G.15}$$

## G.2 Sollicitation suivant l'axe 2

En traction simple suivant la direction 2, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{G.16}$$

En réalisant le même calcul que précédemment, on obtient :

$$\boxed{\sigma_{eq} = \sigma\left(\frac{C}{6}\left(H_a + 4H_b + H_c\right) + FQ^2\right)^{1/2}} \tag{G.17}$$

Et la direction d'écoulement $\underset{\sim}{\mathbf{N}}$ devient :

$$\underset{\sim}{\mathbf{N}} = \frac{1}{\left(\frac{C}{6}\left(H_a + 4H_b + H_c\right) + FQ^2\right)^{1/2}}\ \underset{\sim}{\mathbf{B}} \tag{G.18}$$

$$\text{avec } \underset{\sim}{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \frac{C}{6}\left(-2H_a - 2H_b + H_c\right) + FPQ & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C}{6}\left(H_a + 4H_b + H_c\right) + FQ^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C}{6}\left(H_a - 2H_b - 2H_c\right) + FQR \end{pmatrix}$$

On en déduit alors les expressions des contractions latérales plastiques $\nu_{21}^p$ et $\nu_{23}^p$.

$$\boxed{\nu_{21}^p = -\frac{C\left(H_c - 2H_a - 2H_b\right) + 6FPQ}{C\left(H_a + 4H_b + H_c\right) + 6FQ^2}} \tag{G.19}$$

$$\boxed{\nu_{23}^p = -\frac{C\left(H_a - 2H_b - 2H_c\right) + 6FQR}{C\left(H_a + 4H_b + H_c\right) + 6FQ^2}} \tag{G.20}$$