**UNIVERSITE DE MARNE-LA-VALLEE**

DEA MODELISATION ET SIMULATION EN SCIENCES DES MATERIAUX

**14 janvier 2001, 9h-12h**

**Cours : COMPORTEMENT MECANIQUE DES MATERIAUX**

---

# COMPORTEMENT MECANIQUE DES MOUSSES METALLIQUES

Les mousses de polymères sont bien connues des usagers puisqu'elles interviennent dans le packaging et permettent d'absorber l'énergie de faibles chocs. Pour des chocs plus violents, les mousses métalliques s'imposent peu à peu comme une nouvelle classe de matériaux de l'absorption d'énergie. Des applications sont envisagées dans l'aéronautique et l'automobile.

On sait depuis une cinquantaine d'années fabriquer des mousses d'aluminium par bullage du métal liquide (figure 1) mais leurs propriétés mécaniques n'ont été étudiées que dans les dix dernières années. On peur obtenir des densités relatives (densité de la mousse divisée par la densité de l'aluminium) très variables allant de 0.1 à 0.3. La taille des porosités est millimétrique voire centimétrique (figure 2).

Pour le dimensionnement de composant industriels intégrant des mousses d'aluminium, il est nécessaire d'avoir une loi de comportement décrivant ce milieu. Comme il n'est pas possible du point de vue pratique de calculer le détail de la microstructure, on choisit de remplacer ce milieu hétérogène par un milieu homogène équivalent continu.

On cherche dans ce problème à identifier un modèle de plasticité compressible. En effet, même si l'aluminium est plastiquement incompressible, le milieu poreux lui est compressible (sensible à l'application d'une pression hydrostatique). On supposera que le matériau est isotrope.

Le modèle retenu fait appel à un critère dit elliptique, faisant intervenir les premier et second invariants des contraintes :

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \sigma_{eq} - R_0, \quad \sigma_{eq}^2 = \frac{3}{2} C \underset{\sim}{\boldsymbol{s}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{s}} + F(\text{trace } \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})^2 \tag{1}$$

$R_0, C$ et $F$ sont les paramètres matériau du modèle. La trace désigne la somme des composantes diagonales du tenseur des contraintes. Le déviateur des contraintes est noté $\underset{\sim}{\boldsymbol{s}}$ et est défini par :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{s}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{3}(\text{trace } \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\, \underset{\sim}{\mathbf{1}} \tag{2}$$

Le tenseur unité $\underset{\sim}{\mathbf{1}}$ est diagonal, avec des composantes diagonales égales à 1. On rappelle le produit scalaire entre deux tenseurs :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{s}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{s}} = s_{ij} s_{ij} \tag{3}$$

avec sommation sur les indices répétés.

## 1 Elaboration des mousses d'aluminium

Commenter la figure 1. Que pensez-vous du procédé?

## 2 Comportement en compression

On usine des éprouvettes cylindriques et on travaille en coordonnées polaires dans un repère $(\underline{\boldsymbol{e}}_r, \underline{\boldsymbol{e}}_\theta, \underline{\boldsymbol{e}}_z)$. La compression pure selon l'axe $z$ de l'éprouvette cylindrique est l'essai le plus important pour évaluer la capacité de dissipation d'énergie du matériau. Pour cette sollicitation le tenseur des contraintes a donc la forme $(\sigma > 0)$ :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} \tag{4}$$

### 2.1 Limite d'élasticité

Déterminer en fonction de $R_0, C$ et $F$, la limite d'élasticité en compression selon le critere (1).

Montrer que la condition pour que cette limite d'élasticité soit égale à $R_0$ est :

$$C + F = 1 \tag{5}$$

On adopte cette convention dans toute la suite du problème. Elle ne réduit pas la généralité des résultats car elle correspond simplement à une normalisation du critère.

### 2.2 Loi d'écoulement plastique

La loi d'écoulement donne l'incrément de déformation :

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{N}} \tag{6}$$

où $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique et $\underset{\sim}{\boldsymbol{N}}$ la direction d'écoulement. On suppose que le matériau obéit à la règle de normalité :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{N}} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{7}$$

Montrer que cette direction vaut :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{N}} = (\frac{3}{2} C\, \underset{\sim}{\boldsymbol{s}} + F\, (\text{trace}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\, \underset{\sim}{\mathbf{1}})/\sigma_{eq} \tag{8}$$

### 2.3 Déformation latérale

Lors d'un essai de compression simple selon l'axe $z$, on observe expérimentalement que l'échantillon ne se déforme pratiquement pas dans les directions $r$ et $\theta$. La dimension de la section de l'éprouvette reste donc quasimment constante. Cela implique que le matériau diminue de volume au cours de la déformation.

Exprimer le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{N}}$ pour la compression simple en fonction de $C, F$.

Déduire de l'observation expérimentale précédente une relation entre $C$ et $F$. En ajoutant cette condition à la relation (5), déterminer les valeurs de $C$ et $F$.

### 2.4 Observations expérimentales

La courbe de compression obtenue est donnée sur la figure 3. La contrainte $\sigma$ tracée est calculée en divisant la force appliquée par la section initiale. De même, la déformation $\varepsilon_{zz}$ tracée est obtenue en divisant la longueur courante de l'éprouvette par la longeur initiale.

La figure 4 montre une vue de côté d'une éprouvette de section carrée pendant la déformation. Des techniques d'analyse d'images permettent de calculer un champ de déformation sur une face de l'éprouvette (d'où le choix de section carrée dans cet essai, contrairement au reste du problème pour lequel la section est circulaire). Un exemple de carte de déformation est donnée sur la figure 5. Commenter ces mesures de champ de déformation et tenter d'expliquer les nombreuses irrégularités présentes sur la courbe de traction. A quoi correspond le durcissement très important observé en fin de courbe?

## 3 Comportement sous chargement multiaxial

On utilise un dispositif très courant en mécanique des sols. L'éprouvette cyclindrique est mise dans une "chaussette" de latex et plongée dans un fluide permettant d'appliquer une pression $p$ sur la surface externe $r = R$. Le dispositif permet en outre d'appliquer une contrainte $-\sigma$ sur les surfaces $z = 0, H$. Ces faces ne sont donc pas soumises à la pression supplémentaire $p$.

### 3.1 Champ de contrainte appliqué

Montrer que le champ de contrainte appliqué est de la forme :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} \tag{9}$$

$(\sigma > 0, p > 0)$.

### 3.2 Surface de charge dans le plan $(\sigma, p)$

Exprimer la contrainte équivalente $\sigma_{eq}$ en fonction de $\sigma$ et $p$.

Pour $\sigma = 0$ imposé, calculer la pression de plastification.

Tracer la surface de charge dans le quart de plan $(\sigma, p)$. Pour le tracé, on tiendra compte des valeurs trouvées pour $C$ et $F$ dans la partie 2.3.

### 3.3 Effet d'histoire de chargement

On modélise le léger écrouissage observé peu après le seuil de plasticité (cf. figure 3) par un écrouissage isotrope linéaire :

$$R = R_0 + H\lambda \tag{10}$$

On cherche à appliquer un chargement final purement hydrostatique :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Avec le dispositif disponible, on propose d'atteindre cet état par deux trajets différents présentés sur la figure 6 :

- Trajet direct OB :

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = -kp_1 \tag{12}$$

  les autres composantes restant nulles, $k$ variant de 0 à 1 pendant le trajet.

- Trajet OAB : compression simple OA jusqu'à $\sigma = -p_1$, suivie de l'application AB d'une pression latérale $p$ de 0 à $p_1$, en maintenant la charge $\sigma_{zz} = -p_1$.

Comparer la hauteur finale des éprouvettes à l'issue de ces deux essais.

On rappelle que le multiplicateur plastique est donnée par la relation de Prandtl–Reuss :

$$\dot{\lambda} = \frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{N}} : \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}}{H} \tag{13}$$

Pour répondre à la question, on pourra résoudre successivement les trois questions suivantes.

#### 3.3.1 Trajet 0B

Calculer successivement $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{s}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{N}}, \dot{\lambda}$ et finalement $\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p, \varepsilon^p_{zz}$.

#### 3.3.2 Trajet OA

Il s'agit d'un trajet de compression simple déjà étudié dans la partie 1. On calculera en A la déformation plastique $\varepsilon^p_{zz}$ en fonction de $p_1, R_0$ et $H$.

#### 3.3.3 Trajet AB

Calculer successivement $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{s}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{N}}, \dot{\lambda}$ et finalement $\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p, \varepsilon^p_{zz}$. La composante $\sigma_{zz}$ est fixée à $-p_1$ pendant ce trajet et seul $p$ varie.

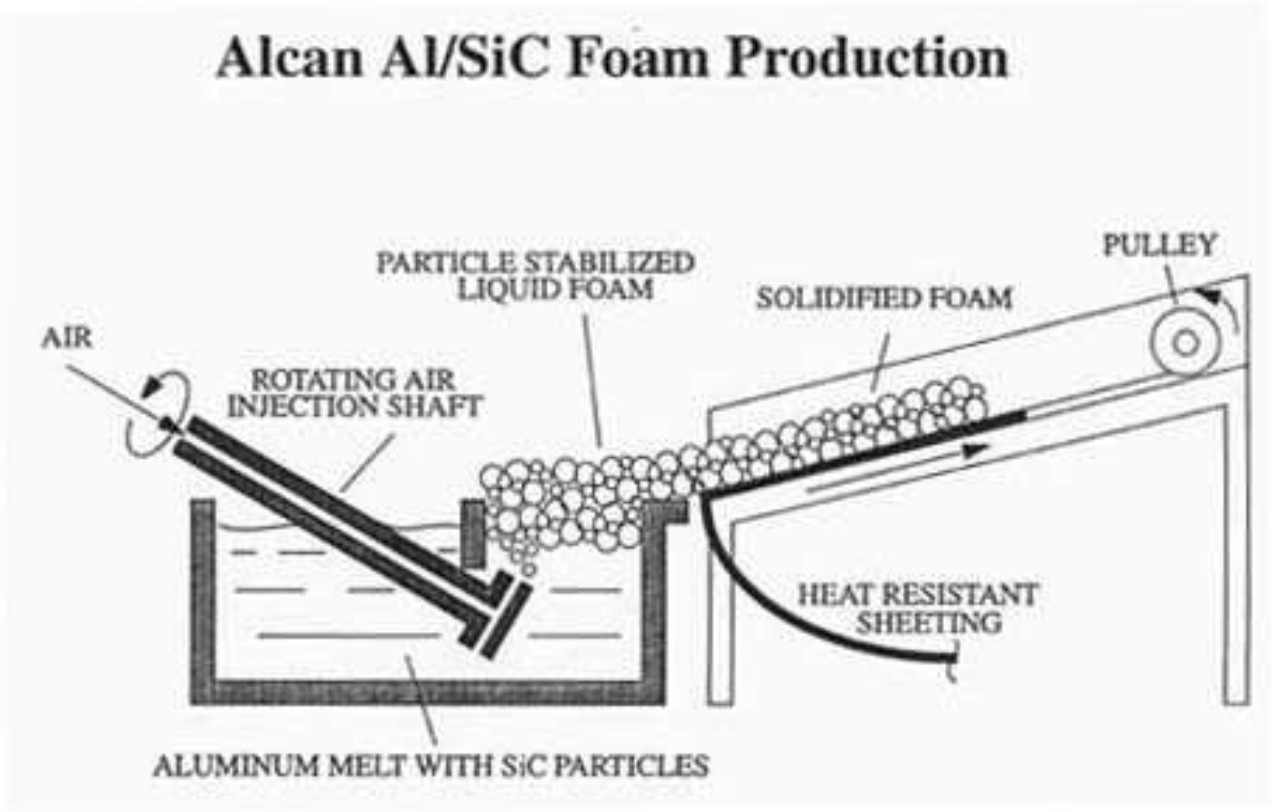


Figure 1: Procédé d'élaboration des mousses d'aluminium (tiré du brevet américain.

Figure 2: Echantillon de mousse d'aluminium (cube dont l'arète mesure 15cm).

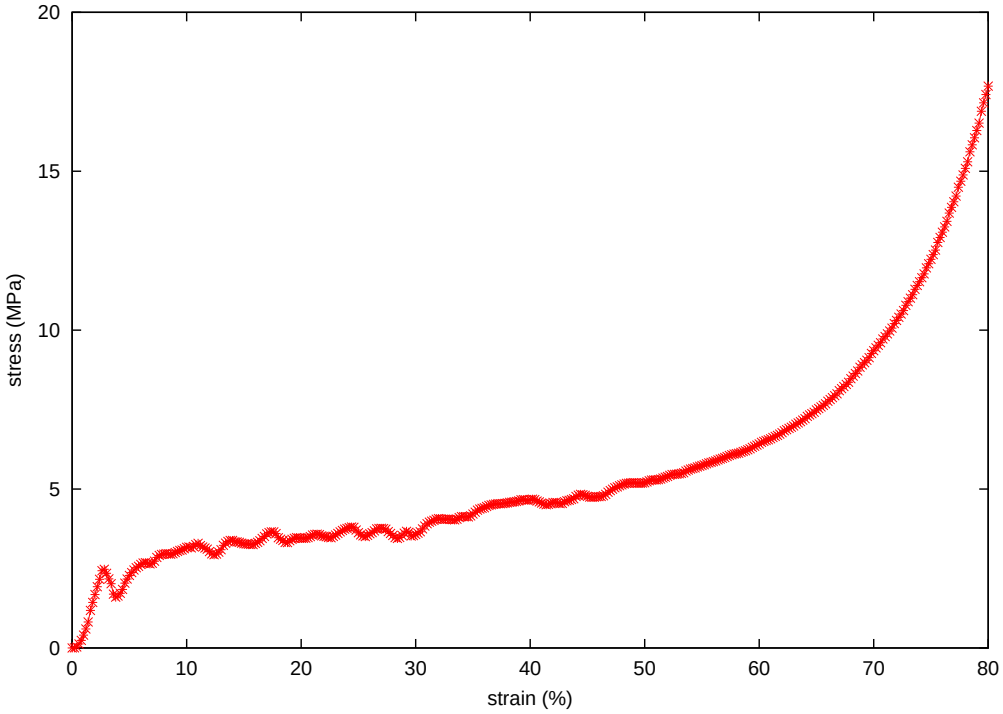


Figure 3: Courbe de compression simple d'une mousse d'aluminium.

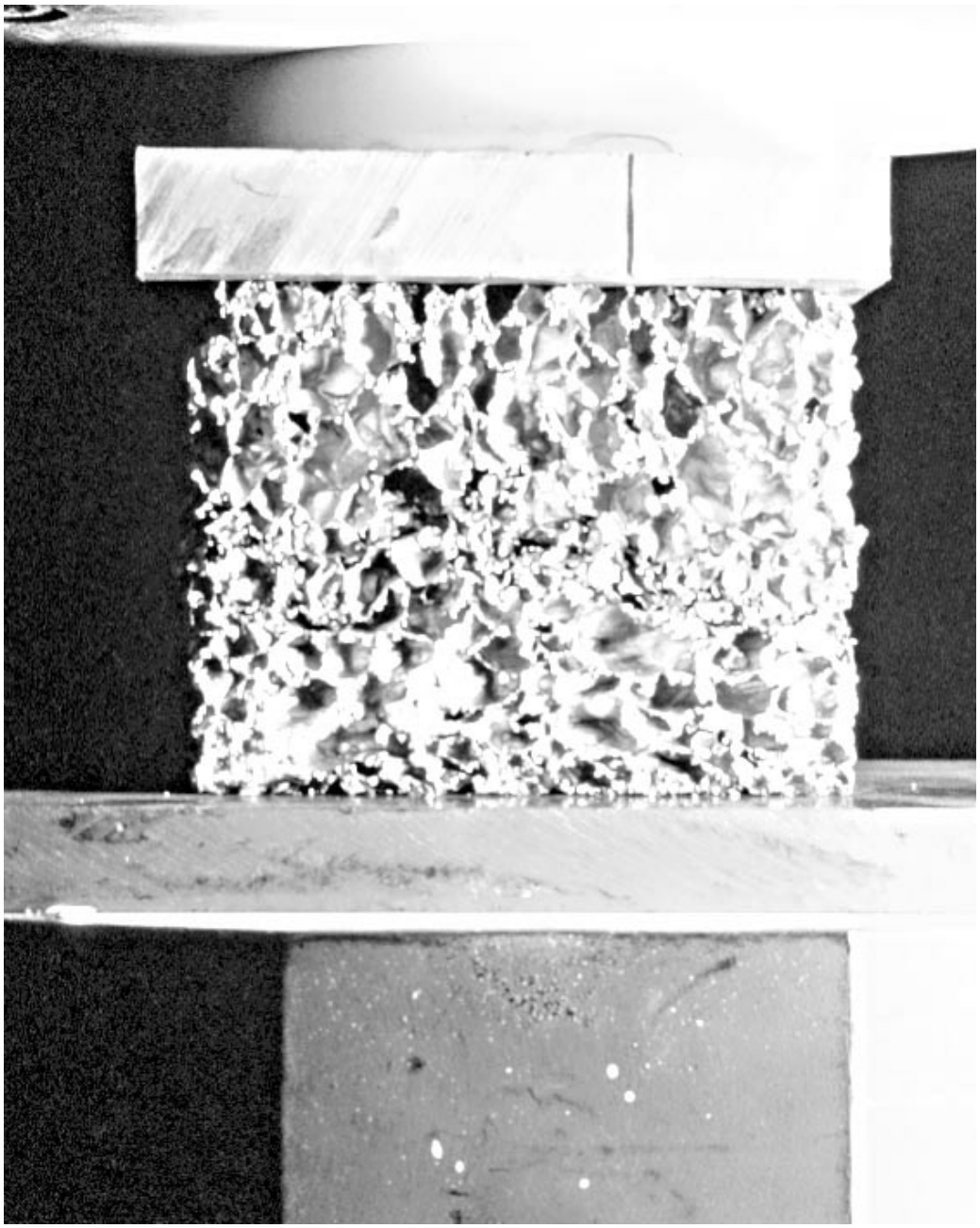

Figure 4: Vue de la mousse lors d'une déformation en compression (la densité initiale n'est pas la même que pour la figure 2).

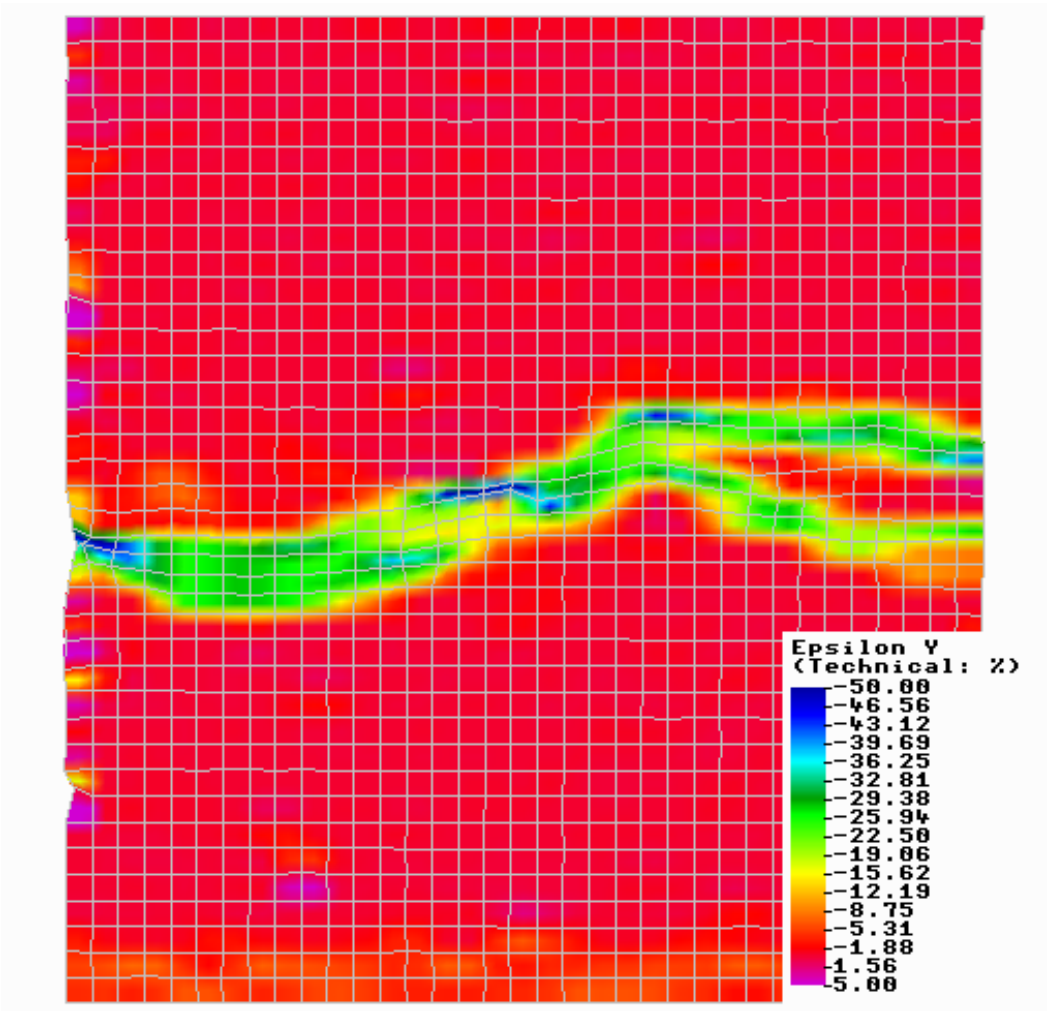


Figure 5: Champ de déformation axial $\varepsilon_{zz}$ sur une face de cube en compression.

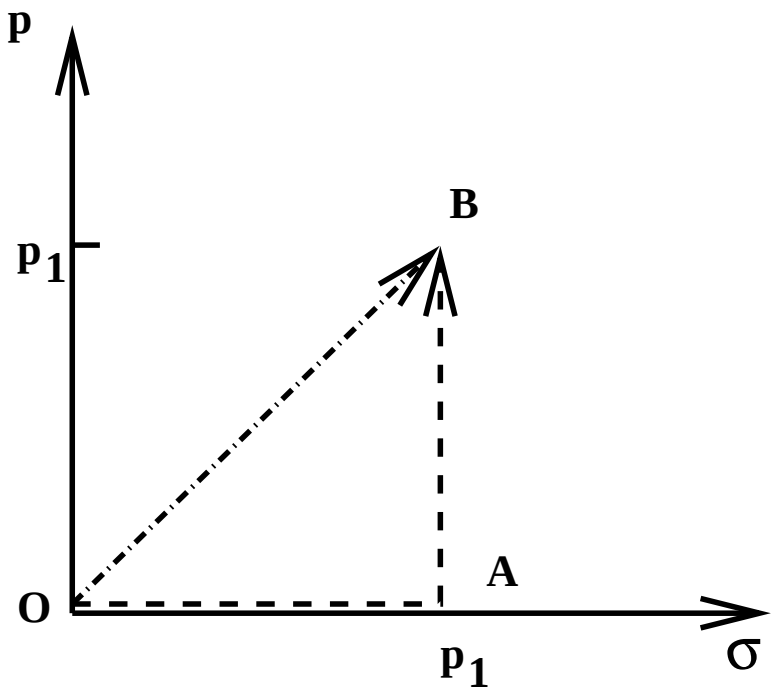


Figure 6: Trajets de contrainte imposée dans le plan compression/pression latérale.